Loi de comportement

0. Rappels de MC Ce que l'on sait du cours de MC :

-  pour info. Changement de notation. $\vec{u} \to \underline{u}$ $\quad \vec{a} \to \underline{\Gamma}$
  $\vec{F} \to \underline{\underline{F}}$
  $\vec{\mathcal{E}} \to \underline{\underline{\mathcal{E}}}$
  $\vec{\nabla} \to \underline{\underline{\nabla}}$

- On sait décrire la cinématique d'un solide qui se déforme.

via
- la transformation $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{X})$ avec
- son gradient $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\varphi} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}$
- le tenseur de déformation : $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left({}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}\right)$.

 - Hypothèse de petite perturbation (HPP) : cadre dans lequel on se place pour ce cours

En HPP :

Déformation : • $\underline{\underline{\varepsilon}}$ = linéarisation de $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{{}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}}_{\underline{\underline{C}}} - \underline{\underline{1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{{}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}}_{\text{linéaire}} + \underbrace{{}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\,\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}}_{\text{non linéaire}}\right)$

⚠ à bien rappeler cela et que $\underline{\underline{\varepsilon}}$ n'est vrai qu'en HPP → c.l. MC.

↳ en HPP, $\|\underline{u}\| \ll 1$, $\|\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\| \ll \underline{\underline{1}} \Rightarrow {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\,\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} \simeq \underline{\underline{0}}$

- élongation : $\underline{dx} = \underline{\underline{F}}\,\underline{dX}$ $\quad$ on $\underline{e_i}$

$$\|\underline{dx}\| = \sqrt{\underline{dx}\cdot\underline{dx}} = \sqrt{\underline{\underline{F}}\,\underline{dx}\cdot\underline{\underline{F}}\,\underline{dx}} = b\sqrt{\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}\cdot\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}}$$

$$\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}\cdot\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i} = {}^t\left(\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}\right)\left(\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}\right) = {}^t\underline{e_i}\,{}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}$$

D'où l'allongement relatif $\dfrac{\|\underline{dx}\| - \|\underline{dX}\|}{\|\underline{dX}\|}$

$\underline{\underline{C}} = 2\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{1}}$

$\simeq 2\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{1}}$

$$\sqrt{{}^t\underline{e_i}\,{}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}} - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}} - 1 \simeq \varepsilon_{ii}$$

Donc ε_{ii} mesure l'allongement relatif dans la direction $\underline{e_i}$.

Mesure de la variation de volume :

en HPP, $\det(\underline{\underline{F}}) = \det \begin{pmatrix} 1+u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ \vdots & 1+u_{2,2} & u_{2,3} \\ \vdots & \cdots & 1+u_{3,3} \end{pmatrix}$

en négligeant les termes d'ordre supérieur faisant intervenir des $\sim u^2$

$\simeq (1+u_{1,1})(1+u_{2,2})(1+u_{3,3})$

idem ↓

$\simeq 1 + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}$

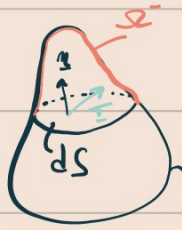
$\simeq 1 + \mathrm{tr}(\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}) = 1 + \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}))$

D'où $dV \simeq (1 + \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}))\, dV_0 \Rightarrow \dfrac{dV - dV_0}{dV_0} = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$

mesure la déformation volumique.

Contrainte :

- On a également introduit un objet décrivant les efforts à l'intérieur de la matière : le tenseur de contrainte de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$



les efforts surfaciques exercés par Ω^- sur Ω^+ à travers dS sont donnés par $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}$.

L'équilibre (PFD) donne : $-\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f_v} = \rho\,\underline{\gamma}$ dans Ω ; $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$ dans Ω.

$\mathcal{P}: \underline{F} = m\underline{\gamma}_G \rightsquigarrow \int_\Omega \underline{f}\,d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}\,dS = \int_\Omega \rho\underline{\gamma}\,d\Omega \longrightarrow \int_\Omega \underline{f} + \mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}\,d\Omega \quad \forall \Omega$

- Les conditions aux limites :
  - déplacement (Dirichlet) : $\underline{u}(\Pi) = \underline{u_d}_i \quad \forall \Pi \in \partial\Omega_{u_i}$
  - Effort (Neumann) : $\underline{T}_i(\Pi) = \underline{F_d}_i \quad \forall \Pi \in \partial\Omega_{f_i}$

Bilan de ce que l'on sait :

- Résoudre un problème de mécanique des milieux continus solide signifie trouver en tout point $\underline{M} \in \Omega$,
  - le champ de déplacement $\underline{u}(M)$ - 3 inconnues
  - le champ des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(M)$ - 6 inconnues.
  - le champ des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(M)$ - 6 inconnues.

15 inconnues.

- Pour cela nous disposons, après le calcul de Γ_K, des équations suivantes :
  - $\underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla_{sym} \underline{u}$: 6 équations.
  - $\mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho \underline{\gamma}$: 3 equations

$\Rightarrow$ 9 equations.

I. Notion de loi de comportement.

Il nous manque alors 6 equations pour espérer pouvoir résoudre le pb de mécanique avec une logique purement cinématique. (on parle ici dans le volume pas des CL).

En effet, les équations décrites plus haut ne décrivent que la cinématique et le respect du PFD mais sont aveugle à la matière du solide étudié.

Des 6 équations manquantes pour fermer le problème viennent décrire le comportement de la matière.

Analogie avec le ressort



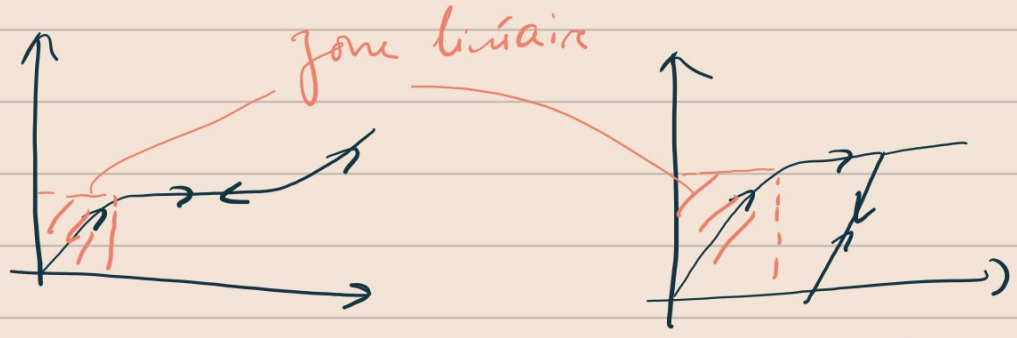
- cinématique $\Delta l = x - x_0 \sim \varepsilon$
- PFD : $m\ddot{x} = F_{ext} - F_{ressort} \sim \mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho \underline{\gamma}$
- $\rightarrow$ la loi de Hooke ferme le problème :

$F_{ressort} = -k \Delta l$.

Nous appelons loi de comportement la fonction tensorielle qui relie la contrainte et la déformation.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\Omega, t), T, \dots).$$

Exemples de tracés illustrant certains liens $\underline{\underline{\varepsilon}} / \underline{\underline{\sigma}}$.



Il existe une grande variété de comportements et l'objet de ce cours est d'étudier l'élasticité linéaire.

Elasticité : l'état de contrainte à un instant donné dépend uniquement de l'état de déformation à ce même instant (indépendant de l'histoire de chargement et de la vitesse de chargement).

↳ pas de dissipation : le comportement est réversible.

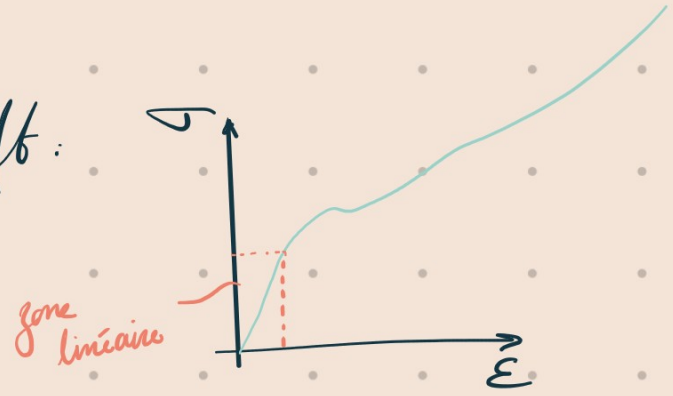
Linéaire :
- Valide uniquement sous l'hypothèse des HPP.
- linéarité de la relation reliant le tenseur de déformation linéarisé et le tenseur de Cauchy.

Potentiel élastique

Puisque le travail de déformation est indépendant du chemin de chargement, la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ dérive d'un potentiel w_{el} tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial w_{el}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \iff \sigma_{ij} = \frac{\partial w_{el}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Draft :



σ est linéaire en ε. Cela signifie que :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \cdots$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{33} = C_{33kl}\varepsilon_{kl} + C_{33kl}\varepsilon_{kl} + C_{33kl}\varepsilon_{kl} \cdots$$

D'où l'introduction d'un tenseur d'ordre 4 (quatre indices) $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ tq $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$

Analogie avec $F = -k\Delta x$

De là on peut définir une potentiel élastique qui caractérise le matériaux : $w_{el} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$

Analogie à $w = \frac{1}{2}k\Delta x^2$

Par définition une force est conservative si son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi.

On part d'un point $\underline{O}$ arbitraire, vers un point $\underline{n}$ et on pose :

$$E_p(\underline{n}) = -W_{O \to n}(\underline{F}) = -\int_O^n \underline{F} \cdot d\underline{x}$$

↳ l'intégrale a une valeur unique car le travail ne dépend du chemin, $E_p(\underline{n})$ est donc une fonction d'état.

Étudions maintenant la variation de E_p entre deux points $\underline{n}$ et $\underline{n'}$ infiniment proches :

$$dE_p = E_p(\underline{n'}) - E_p(\underline{n})$$

$$= -\int_O^{\underline{n'}} \underline{F} \cdot d\underline{x} + \int_O^{\underline{n}} \underline{F} \cdot d\underline{x}$$

$\underline{F}$ constante entre $\underline{n}$ et $\underline{n'}$ infiniment proches

$$\int_O^{\underline{n}} + \int_{\underline{n}}^{\underline{n'}}$$

car indép chemin + Chasles.

$$= -\int_{\underline{n}}^{\underline{n'}} \underline{F} \cdot d\underline{x} = -\underline{F} \cdot \int_{\underline{n}}^{\underline{n'}} d\underline{x}$$

↳ $\underline{n'} = \underline{n} + d\underline{x}$

$$= -\underline{F} \cdot d\underline{x}$$

par identification, $dE_p = \underline{grad}(E_p) \cdot d\underline{x}$

d'où $\boxed{\underline{F} = -\underline{grad}(E_p)}$

De manière analogue, le travail élémentaire reçu par la matière (opposé à celui fourni par le effet intérieur), vaut : $\delta w = \underline{\underline{\Sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}$.

puisque ce travail est indépendant du chemin, on peut définir une fonction unique $W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \int_{\underline{\underline{0}}}^{\underline{\underline{\varepsilon}}} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}})\, d\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$

$$dW = W(\underline{\underline{\varepsilon}} + d\underline{\underline{\varepsilon}}) - W(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$= \int_{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\underline{\underline{\varepsilon}} + d\underline{\underline{\varepsilon}}} \underline{\underline{\Sigma}} : d\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$$

$\underline{\underline{\Sigma}}$ constant sur $d\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$= \underline{\underline{\Sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}$$

par identification, $dW = \dfrac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}$

d'où $\underline{\underline{\Sigma}} = \dfrac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$.

Rq : ① En plus du travail avec $\underline{F}$, la force de rappel du ressort qui s'oppose au mouvement, on note, la convention est que $\underline{\underline{\Sigma}}$ représente l'effort appliqué à la matière pour garantir la cohésion d'où

- $\underline{F} = -\text{grad}(E_p)$
- $\underline{\underline{\Sigma}} = +\dfrac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$

② δw : échange d'énergie avec l'extérieur **quantité** de travail fournie.

dW : variation d'énergie (stockée) suite aux déformations passées

Potentiel élastique linéaire.

La relation linéaire entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est spécifiée par un tenseur d'ordre 4 tq :

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$ soit par identification, $C_{ijkl} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$



$$\sigma_{ij} = C_{ij11}\varepsilon_{11} + C_{ij12}\varepsilon_{12} + C_{ij13}\varepsilon_{13} + \dots$$

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ est appelé **tenseur d'élasticité linéaire**.

Dans le cas de l'élasticité linéaire, on a donc :

$$w_{elas} = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

On retrouve bien : $\underline{\underline{\sigma}} = \dfrac{\partial w_{elas}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$

Analogie avec le ressort : $w_{elas} = \frac{1}{2} k\,\delta l^2$

$F_{ext\to mass} = \dfrac{\partial w_{elas}}{\partial \delta l} = k\,\delta l \; (= -F_{rappel})$

Tenseur d'élasticité linéaire.

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ est un tenseur d'ordre 4 de $(3\times3\times3\times3 =)\ 81$ composantes.

Cependant, du fait des symétries de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$, on peut réduire le nombre de composantes indépendantes.

$C_{ijkl} = C_{jikl}$ et $C_{ijkl} = C_{ijlk}$: **les petites symétries de $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$**

de même, $C_{ijkl} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \dfrac{\partial w_{elas}}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij}$: **grande symétrie**

Chacune des petites symétries fait passer le nombre de combinaisons indépendantes de 9 à 6 : le 11, 22, 33 puis 12 13 23. Les petites symétries font toutes les $9 \times 9 = 81$ à $\underbrace{6 \times 6 = 36}$.

↳ en notation de Voigt 6×6 matrice.

La grande symétrie impose cette matrice 6×6 d'être symétrique : 36 cases - 6 sur la diagonale. 30 termes hors diagonaux → 15 termes hors diagonaux indépendants d'où $15 + 6 = 21$ termes indépendants.

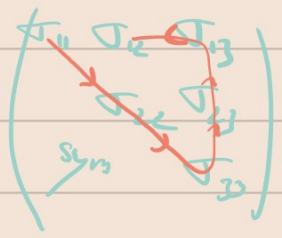
Notation de (Kelvin)-Voigt

Afin de permettre une résolution par algèbre linéaire classique, on "vectorise" le tenseur symétrique d'ordre 2 que sont $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Rq. La forme tensorielle est plus compacte et géométrique (simplicité des prises en compte des rotations et changement de base sans avoir à utiliser d'énormes matrices de rotation pour $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ (Matrice de Bond). La pire étant avec Voigt : il faut des matrices différentes pour $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Voigt : $\underline{\underline{\Sigma}}$ $\underline{\underline{E}}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{16} \\ & \ddots & & \vdots \\ & \text{sym} & & C_{56} \\ & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$



pourquoi des 2 ?

Calcul de l'énergie de déformation

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{33}\varepsilon_{33}$$

$$= \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\varepsilon_{13} + 2\sigma_{23}\varepsilon_{23}$$

$$= \underline{\Sigma} \cdot \underline{E}$$

l'énergie qui avec le tenseur se calcule avec un double produit contracté se calcule avec un produit vectoriel en notation de Voigt.

⚠ Le produit scalaire euclidien classique des vecteurs n'est pas égal au produit doublement contracté : $\underline{\underline{\sigma}}^D : \underline{\underline{\varepsilon}}^D + \underline{\underline{\varepsilon}}^D : \underline{\underline{\varepsilon}}^D$

pour cela il faut utiliser la notation de Kelvin-Voigt, plus rigoureuse :

Kelvin-Voigt :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \cdots & \tilde{C}_{16} \\ & \ddots & & \vdots \\ & \text{sym} & & \tilde{C}_{56} \\ & & & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Elasticité isotrope.

Nous supposons enfin que la loi de comportement est linéaire et isotrope. C'est à dire qu'elle est invariante par toute rotation $\underline{\underline{R}}$: $w_{elas}(\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{R}}) = w_{elas}(\underline{\underline{\varepsilon}})$

La loi de comportement doit donc uniquement dépendre des trois valeurs propres de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Il y a une bijection entre ces valeurs propres et les invariants du tenseur de déformation mais ces derniers sont plus commodes à utiliser car ils sont continuement dérivable partout (fonctions polynomiales des composantes) et permettent d'aboutir à des expressions tensorielles simples à la dérivation.

On cherche donc à écrire le potentiel élastique comme fonction des invariants

$$I_1 = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}), \quad I_2 = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) \quad I_3 = \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

La loi étant linéaire on cherche une fonction quadratique.

homogène

Le déf étant un poly de 3 composantes, il faut d'abord 3, il ne reste que I_1 et I_2.

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

$$\boxed{w_{elas} = \underbrace{\frac{\lambda}{2}\left(\mathrm{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}})\right)^2 + \mu\, \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}}_{\text{quadratic}}}$$

où λ et μ sont deux constantes (paramètres matériaux) appelés coefficients de Lamé exprimés en Pa.

Pour trouver la loi de comportement associée à ce potentiel, on la dérive :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w_{elas}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \varepsilon_{kk}^2}{\partial \varepsilon_{ij}} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

($\varepsilon_{kk}\varepsilon_{mm}$)

f g

$$= \frac{\lambda}{2} \times 2\varepsilon_{kk}\frac{\partial \varepsilon_{mm}}{\partial \varepsilon_{ij}} + \mu\left[\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{kl}\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)$$

$$= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu \left(\underbrace{\delta_{ik}\delta_{jl}\varepsilon_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}\varepsilon_{kl}}_{2\varepsilon_{ij}} \right)$$

$$= \boxed{\lambda \, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \, \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

On peut aussi voir que $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{1}}$

$$\frac{\partial (\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})^2}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{\partial (\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{1}})^2}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

$$= 2 \times \underline{\underline{1}} \times (\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{1}})$$

$$= 2 \, \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} \, \underline{\underline{1}}$$

Suivant l'interprétation qu'on veut avoir de cette loi on peut la réécrire en faisant intervenir $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}}$ la déviateur de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ qui caractérise la distortion de forme sans prendre en compte la variation de volume. e est à trace nulle.

On peut alors écrire :

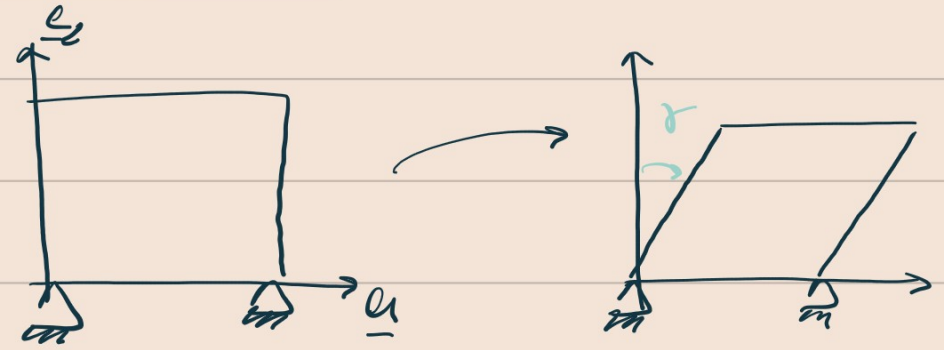
$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \left(\underline{\underline{e}} + \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right)}_{K} \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \, \underline{\underline{e}}$$

K : module de compressibilité.

Exemples a et b ⇒ donner du sens à ν et λ

Cisaillement :



$$\underline{u} = \gamma X_2 \underline{e_1}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

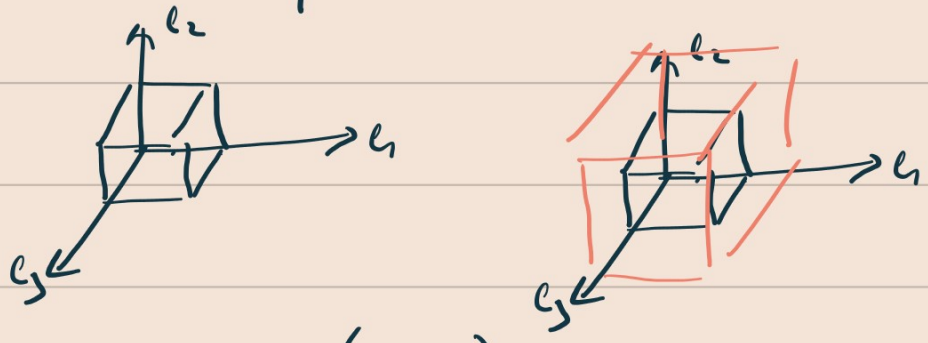
$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\nu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \underbrace{\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})}_{0}\underline{\underline{1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mu\gamma & 0 \\ \mu\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ν peut aussi être noté G : module de cisaillement.

$$\nu = \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_{12}} \left(= \frac{\sigma_{13}}{2\varepsilon_{13}} = \frac{\sigma_{23}}{2\varepsilon_{23}} \right.$$ suivant les directions dans lesquelles on cisaille).

Compression isostatique.



$\underline{u} = \beta (x_i \underline{e_i})$, $\beta < 0$.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underbrace{\beta \, \underline{\underline{1}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \lambda \times \underbrace{3\beta}_{\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}} \underline{\underline{1}}$$

$$= (2\mu + 3\lambda) \beta \, \underline{\underline{1}}$$

$$= -p \, \underline{\underline{1}}$$

On a $\dfrac{\Delta V}{V} = \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = 3\beta = \dfrac{3 \times (-p)}{(2\mu + 3\lambda)}$

$$= \frac{-p}{k}$$

d'où $k \, \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = -p$

$$\boxed{k \, \frac{\Delta V}{V} = -p}$$

Inversion de la loi de comportement :

De manière analogue à $\underline{\underline{\varepsilon}}$, on peut définir le tenseur de souplesse $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$ tel que

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}$$

- le potentiel élastique peut alors s'écrire

$$w_{el} = \frac{1}{2}\, \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}$$

analogie : $w_{el} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$

Dans le cas isotrope on peut mettre $\underline{\underline{S}}$ en fonction des coefficients de Lamé λ et μ :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{1}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (*)$$

On prend la trace de cette expression :

$\mathrm{tr}(*)$: $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}} = 3\lambda\, \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} + 2\mu\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$

$= (2\mu + 3\lambda)\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$

d'où : $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\lambda\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{2\mu + 3\lambda}\, \underline{\underline{1}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \left[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\lambda\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{2\mu + 3\lambda}\, \underline{\underline{1}} \right]}$$

En posant : $\frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2\mu}$ et $\frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}$

la relation devient :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

d'où $$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

Soit $\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} = \frac{1}{2\mu}$

$$\Rightarrow \frac{1}{E} = \frac{1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}$$

$$= \frac{3\lambda+2\mu-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}$$

$$= \frac{(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}$$

$$1+\nu = \frac{E}{2\mu} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}\right)$$

$$= \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}$$

d'où $\nu = \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)} - 1$

$$= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Exemple c. → donner du sens à E et ν

Cas de la traction pure

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On utilise la loi de comportement permettant de remonter à $\underline{\underline{\varepsilon}}$ depuis $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/E \times \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu/E\,\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu/E\,\sigma_{11} \end{pmatrix}$$

d'où $\quad \varepsilon_{11} \times E = \sigma_{11} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}}$

$$\boxed{\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}}$$

$$-\nu/E\,\sigma_{11} \times \frac{E}{\sigma_{11}}$$

Exercice : compression oedométrique.

1. $$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{u}\right) \end{cases}$$

CL : $\underline{u}(r, \theta, 0) = \underline{0}$ sur $\partial\Omega_{inf}$

$\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, h) = -p \underline{e_z}$ sur $\partial\Omega_{sup}$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{u}(R, \theta, z) \cdot \underline{e_r} = 0 \text{ sur} \\ \underline{\underline{\sigma}}(R, \theta, z) \cdot \underline{e_\theta} = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}}(R, \theta, z) \cdot \underline{e_z} = 0 \end{array}\right| \partial\Omega_{lat}.$$

2. $\underline{u} = u(z)\, \underline{e_z}$

3. $$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{u}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{z,z} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = u_{z,z} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \Rightarrow u_{z,zz} = 0$$

$u_z = az + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$u(z=0) = 0 \Rightarrow b = 0$ d'où $u_z = az$

d'où $\underline{\underline{\Sigma}} = a \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$

sur $\partial\Omega_{sup}$, $\underline{\underline{\Sigma}} \cdot e_z = -P$

$\Rightarrow a(\lambda + 2\mu) = -P$

$\Rightarrow a = -\dfrac{P}{\lambda + 2\mu}$

Soit $\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda P}{\lambda + 2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\lambda P}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$

$\underline{u} = -\dfrac{P}{\lambda + 2\mu}\, z$

5. $\underline{\underline{\Sigma}}(R, \theta, z) \cdot \underline{e_r} = -\dfrac{\lambda P}{\lambda + 2\mu}\, \underline{e_r} = -q\, \underline{e_r}$ (def de $\underline{\underline{\Sigma}}$)

d'où $q = \dfrac{\lambda P}{\lambda + 2\mu}$

6. $K = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2}{3}\frac{E}{2(1+\nu)}$

$$= \frac{3E\nu + E(1-2\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$= \frac{E(1+\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E}{3}\frac{1}{(1-2\nu)}$$

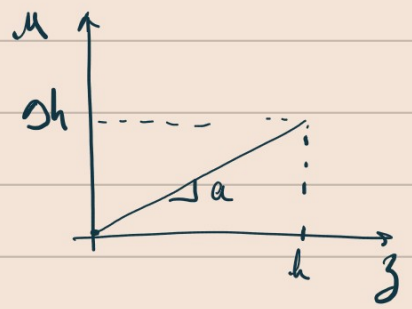
Donc $K \to \infty \Rightarrow \nu \to 1/2$

Dans ce cas, $\lambda \sim K \gg \mu$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P}{\lambda+2\mu} \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P}{\lambda} \end{pmatrix} \sim -\frac{P}{K} \quad \text{car } K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

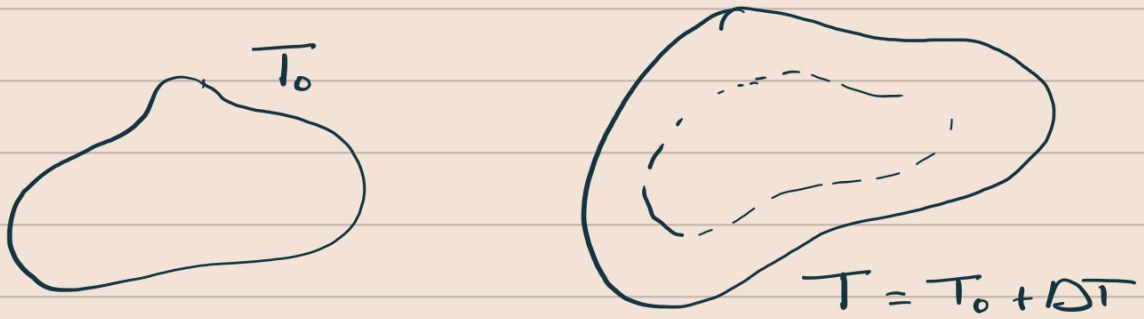
d'où $K \simeq \frac{-P}{\varepsilon_{zz}}$ avec $P = \frac{F}{S}$



$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta h}{h}$$

Soit $K = \frac{F}{S}\frac{h}{|\Delta h|}$

Thermoélasticité



$\begin{cases} \Delta T > 0 : \text{dilatation thermique} \\ \Delta T < 0 : \text{contraction thermique.} \end{cases}$

Quand un solide est soumis à une variation de température ΔT, il se dilate ou se contracte suivant le signe de ΔT.

Les déformations thermiques sont directement proportionnelles à ΔT avec un coefficient de proportionnalité α, ici supposé isotrope.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}(\underline{r}) = \alpha \, \Delta T(\underline{r}) \, \underline{\underline{1}}.$$

Si rien n'empêche cette dilatation, la variation de température n'entraîne aucune contrainte. Les déformations thermiques s'ajoutent aux déformations élastiques :

- $\underline{\underline{\varepsilon}}^{total}(\underline{r}) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{ela}(\underline{r}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}(\underline{r})$

$$= \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{r}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}(\underline{r})$$

$$= \underbrace{\frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^{ela}} + \underbrace{\alpha \, \Delta T \, \underline{\underline{1}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}}$$

- $\underline{\underline{\varepsilon}}^{e} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{total} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$ $\quad \left(\text{si } \underline{\underline{\varepsilon}}^{tot} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}, \ \underline{\underline{\varepsilon}}^{e} = 0 \right)$.

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^e + \lambda\,\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^e\right)\underline{\underline{1}}$$

$$= 2\mu\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{total} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}\right) + \lambda\,\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{total} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}\right)\underline{\underline{1}}$$

$$= 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{tot} + \lambda\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{tot} - \underbrace{\left(2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{th} + \lambda\,\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}\right)\underline{\underline{1}}\right)}$$

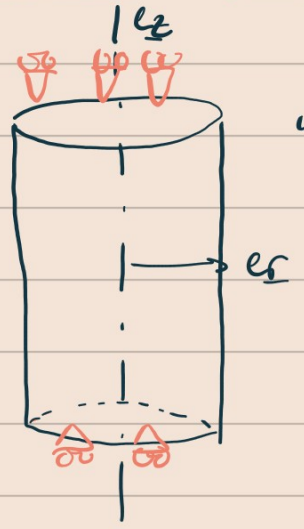
$$2\mu\,\alpha\,\Delta T\,\underline{\underline{1}} + \lambda \times 3\,\alpha\,\Delta T\,\underline{\underline{1}}$$

$$= \alpha\,\Delta T\,(2\mu + 3\lambda)$$

$$= 3\,\alpha\,\Delta T\,K$$

$K = \frac{2}{3}\mu + \lambda$

Exercice - thermoélasticité



sur $\partial\Omega_{z=0}$: $\begin{cases} \underline{u}(r,\theta,0)\cdot\underline{e}_z = 0 \\ \underline{T}\cdot\underline{e}_\theta = 0 \quad \underline{T}\cdot\underline{e}_r = 0 \end{cases}$

$(\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,0)\cdot\underline{e}_z$

sur $\partial\Omega_{z=L}$: $\underline{u}(r,\theta,L)\cdot\underline{e}_z = 0$

$\underline{T}\cdot\underline{e}_\theta = 0 \quad \underline{T}\cdot\underline{e}_r = 0$

$(\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,L)\cdot\underline{e}_z)$

sur $\partial\Omega_{lat}$: $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(R,\theta,z)\cdot\underline{e}_r = \underline{0}$

2/ $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$

On a bien $\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ dans cette forme

le champ de contrainte est admissible car elle permet également de vérifier le CL.

3) $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$

$$= \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} + \alpha\Delta T\,\underline{\underline{1}}$$

d'où $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -\nu/E\,\sigma_{zz} + \alpha\Delta T & 0 & 0 \\ 0 & -\nu/E\,\sigma_{zz} + \alpha\Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha\Delta T \end{pmatrix}$

Contrainte équivalente et surface seuil. $\underline{\underline{\sigma}} \hookleftarrow C$ ← critère de limite élastique.

Pour avoir une relation d'ordre entre un critère de sortie de zone linéaire et un état de contrainte donné par un tenseur d'ordre 2, on introduit un scalaire mesurant cet état : la contrainte équivalente.

Il faut choisir une contrainte équivalente :

Rankine : $\sigma_{eq}^R = \max(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$

Tresca : $\sigma_{eq}^T = \sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j|$

von Mises : $\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2\right]}$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}\,\underline{\underline{\sigma}}^D : \underline{\underline{\sigma}}^D}$$

↳ Ici, faire un point sur le sens physique de σ_{vM} très clair avec la déviatorique, lien avec séances précédentes.

Techniques de résolution analytique.—

Rappel

On étudie des solides qui se déforment sous l'action de sollicitations extérieures, ces dernières induisant également des contraintes dans la structure.

Hypothèses :
- HPP
- loi élastique isotrope
- quasi-statique
- isothermes

Dans ce cas l'équilibre est donné par :

$$\forall \Omega \in \mathcal{R}, \quad \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0$$

Bilan des équations :

Equilibre $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0 \quad (\underline{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\underline{\sigma}})$

Comportement : $\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}}$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$$

Compatibilité $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{u})$

CL : $\forall \Omega \in \partial\mathcal{R}_u \quad \underline{u}(\Omega) = \underline{u}_d$

$\forall \Omega \in \partial\mathcal{R}_f \quad \underline{\underline{\sigma}}(\Omega) \underline{n} = \underline{f}_d$

Notion d'admissibilité :

- Un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est dit stat. adm (SA) ssi il vérifie les équations d'équilibre et les CL en effort.
- De même, un champ de déplacement est dit cin. adm. (CA), ssi il vérifie les CL en déplacement.

La déformation doit être compatible :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}_{sym} \underline{u}.$$

Notion d'unicité :

Si on trouve un champ de contrainte SA associé à un champ de déplacement CA, il s'agit d'UNE solution du problème. Le champ de contrainte est unique mais le déplacement ne l'est pas. (c.f. section énergétique du cours)

Théorème de superposition.

Du fait de la linéarité des problèmes traités,

Si un corps Ω, soumis à des déplacements imposés $\underline{u}_d^{(1)}$, des efforts volumiques $\underline{f}_v^{(1)}$ et surfaciques $\underline{f}_s^{(1)}$, admet pour solution un champ de déplacement $\underline{u}^{(1)}$, un champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}$ et un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$ et que ce solide, soumis à des déplacements imposés $\underline{u}_d^{(2)}$, des efforts volumiques $\underline{f}_v^{(2)}$ et surfaciques $\underline{f}_s^{(2)}$, admet pour

Solution un champ de déplacement $\underline{u}^{(1)}$, un champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}$ et un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$, alors,

$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, ce corps soumis à

$\lambda_1 \underline{u}_d^{(1)} + \lambda_2 \underline{u}_d^{(2)}$

$\lambda_1 f_s^{(1)} + \lambda_2 f_s^{(2)}$

$\lambda_1 f_v^{(1)} + \lambda_2 f_v^{(2)}$

admet pour solution $\begin{cases} \lambda_1 \underline{u}^{(1)} + \lambda_2 \underline{u}^{(2)} \\ \lambda_1 \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} \\ \lambda_1 \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \end{cases}$

Récapitulatif de l'approche en déplacement.

① Postule un champ de déplacement $\underline{u}$.

② Calcule le champ de déformation linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$ correspondant

③ Utilise la loi de comportement pour calculer le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$.

④ L'injecte dans les équations d'équilibre et résoudre l'équa diff.

⑤ Utilise les CL pour déterminer les constantes d'intégration.

Remarque : les équations de compatibilité, d'équilibre et la loi de Hooke, dans le cas élastique, linéaire, isotrope, peuvent être combinées en une unique équation, l'équation de Navier

$$\begin{cases} \underline{\operatorname{div}}\,\underline{\underline{T}} + \underline{f}_v = \underline{0} & (1) \\ \underline{\underline{T}} = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}} & (2) \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\nabla}\underline{u} + {}^{t}\underline{\nabla}\underline{u}\right) & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall \Omega \in \mathbb{R},\ (\lambda+\mu)\,\underline{\nabla}(\operatorname{div}(\underline{u})) + \mu\,\underline{\Delta}\,\underline{u} + \underline{f}_v = 0}$$

Démonstration : Professeur de cet exercice pas d'exercice à utiliser la notation d'Einstein.

- $(2) \Rightarrow \operatorname{div}(\underline{\underline{T}}) = \operatorname{div}\left(2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}}\right)$

$$= 2\mu\,\operatorname{div}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \lambda\,\operatorname{div}\left(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}}\right)$$

Soit $f \in \mathbb{R}$ et $\underline{\underline{T}}$ un tenseur d'ordre 2,

$$\operatorname{div}(f\,\underline{\underline{T}}) = (f\,T_{ij})_{,j}$$

$$= \underbrace{f_{,j}\,T_{ij}}_{\underline{\underline{T}}\cdot\underline{\nabla} f} + \underbrace{f\,T_{ij,j}}_{f\,\operatorname{div}(\underline{\underline{T}})}$$

D'où $\operatorname{div}\left(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}}\right) = \underline{\underline{1}}\,\underline{\nabla}\left(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\right)$

$$= \underline{\nabla}\left(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\right).$$

D'où $\operatorname{div}\,\underline{\underline{T}} = 2\mu\,\operatorname{div}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \lambda\,\underline{\nabla}\left(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\right).$

(3) $\Rightarrow \cdot \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\,\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} + \underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{i,i} + u_{j,j}\right) = u_{i,i} = \operatorname{div}\underline{u}$$

$\cdot \operatorname{div}\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij,j} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)_{,j}$

$= \frac{1}{2}\left(u_{i,jj} + u_{j,ij}\right)$

$\alpha_1 \cdot u_{i,jj} = \underline{\Delta}\underline{u}$

$\cdot u_{j,ij} = u_{j,ji} = \left(u_{j,j}\right)_{,i}$

$= \underline{\nabla}\left(\operatorname{div}(\underline{u})\right)$

Sai

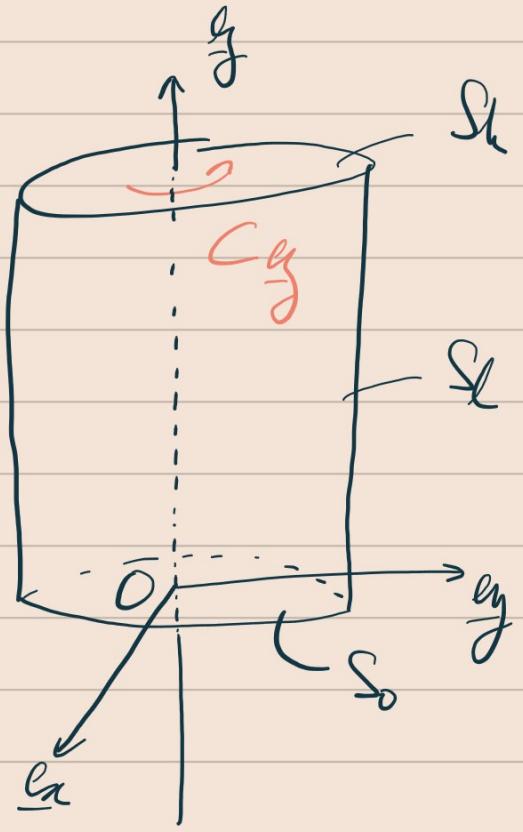
$$\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\left[\frac{1}{2}\left(\underline{\Delta}\underline{u} + \underline{\nabla}\left(\operatorname{div}(\underline{u})\right)\right] + \lambda\,\underline{\nabla}\operatorname{div}(\underline{u}) \quad (4)$$

Finalmente, (1) + (4):

$$2\mu\left[\frac{1}{2}\left(\underline{\Delta}\underline{u} + \underline{\nabla}\left(\operatorname{div}(\underline{u})\right)\right] + \lambda\,\underline{\nabla}\operatorname{div}(\underline{u}) + \underline{f_v} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu\,\underline{\Delta}\underline{u} + (\mu + \lambda)\,\underline{\nabla}\left(\operatorname{div}(\underline{u})\right) + \underline{f_v} = \underline{0}}$$

TD 4. Torsion d'un barreau cylindrique.



1. $\underline{\underline{T}}(r=R,\theta,z)\cdot\underline{e_r} = \underline{0}$ sur S_l.

$\underline{u}(r,\theta,z=0)=\underline{0}$ sur S_0

Sur S_h on ne connait que la résultante :

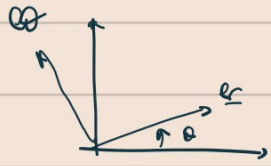
$$\iint_{S_h} \underline{\underline{T}}(r,\theta,z=h)\cdot\underline{e_z}\, dS = \underline{R} = \underline{0}$$

$$\iint \text{on } \wedge \left(\underline{\underline{T}}(r,\theta,z=h)\cdot\underline{e_z}\right) dS = C_{\underline{e_z}}$$

2. un point $\underline{\Pi}(r,\theta,z)$ se déplace après une rotation φ en $\underline{\Pi}'(r,\theta+\varphi(z),z)$

$$\underline{u} = \Pi - \Pi' = r\,\underline{e_r}(\theta+\varphi) - r\,\underline{e_r}(\theta)$$

$\underline{e_r}(\theta) = \cos\theta\, \underline{e_x} + \sin\theta\, \underline{e_y}$; $\underline{e_\theta} = \cos\theta\, \underline{e_y} - \sin\theta\, \underline{e_x}$



$$\underline{e_r}(\theta+\varphi) = \cos(\theta+\varphi)\,\underline{e_x} + \sin(\theta+\varphi)\,\underline{e_y}$$

$$= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)\,\underline{e_x} + (\sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta)\,\underline{e_y}$$

d'où $\underline{u} = r\Big[(\cos\theta(\cos\varphi - 1) - \sin\theta\sin\varphi)\,\underline{e_x} + (\sin\theta(\cos\varphi - 1) + \sin\varphi\cos\theta)\,\underline{e_y}\Big]$

$$= r\Big[(\cos\varphi - 1)\underbrace{(\cos\theta\,\underline{e_x} + \sin\theta\,\underline{e_y})}_{\underline{e_r}} + \underbrace{\sin\varphi}_{\simeq\varphi}\underbrace{(\cos\theta\,\underline{e_y} - \sin\theta\,\underline{e_x})}_{\underline{e_\theta}}\Big]$$

$\simeq r\varphi\,\underline{e_\theta}$ ($\cos\varphi - 1 \simeq 0$)

d'où $\boxed{\underline{u} = \varphi(z)\, r\, \underline{e_\theta}}$

3. On saute.

$$\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - u_\theta\right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_r\right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

4. $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 0 & r\varphi' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\text{Sym}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}r\varphi' \\ 0 & \frac{1}{2}r\varphi' & 0 \end{pmatrix}$$

5. $\underline{\underline{\Sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \, \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}} \, \underline{\underline{1}}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu r\varphi' \\ 0 & \mu r\varphi' & 0 \end{pmatrix}$$

notons que $\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{0}$ sur S_R donc CL sur S_R vérifiée.

5 bis : injecter le tenseur de contrainte dans l'équilibre et en déduire l'expression du champ de φ en prenant en compte la CL sur S_0.

$$\underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu r\varphi'' \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

d'où $\varphi'' = 0$

Soit $\varphi' = \alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(z) = \alpha z + \beta}$$

Détermination des constantes d'intégration à l'aide des CL.

Or $u(z=0) = 0$ d'où $\beta = 0$

On a donc :

$$\underline{u} = r A z \, \underline{e_\theta}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} r\alpha \\ 0 & \frac{1}{2} r\alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu r\alpha \\ 0 & \mu r\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

7. $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, z=h) \cdot \underline{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu r \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \mu r \alpha \, \underline{e_\theta}$

$$\underline{R} = \iint_{S_h} \mu r \alpha \, \underline{e_\theta} \, r \, d\theta \, dr$$

$$= \mu \int_{r=0}^{R} r^2 \, dr \int_{\theta=0}^{2\pi} \underline{e_\theta} \, d\theta$$

$$= \underline{0}$$

$$\underline{\delta} = \iint \underline{OM} \wedge \underline{T} \, dS$$

$$= \iint r \underline{e_r} \wedge \mu \alpha r \underline{e_\theta} \, r \, d\theta \, dr$$

$$= \mu \alpha \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \, \underline{e_z}$$

$$= \mu \alpha \frac{R^4}{4} \times 2\pi \underline{e_z} = \mu \frac{\alpha R^4 \pi}{2} \underline{e_z}$$

or $\delta = C$ d'où $\boxed{\alpha = \frac{2C}{\mu \pi R^4}}$

8. diagonalisation du tenseur de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \tau \\ 0 & \tau & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda \times \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda \left(\lambda^2 - 2^2\right) = 0$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 2$ on ordonne: $\lambda_I = 2$, $\lambda_{II} = 0$, $\lambda_{III} = -2$

$\lambda_3 = -2$

Directions propres associées :

$\lambda_I = 2$ $\qquad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega\alpha \\ 0 & j\omega\alpha & 0 \end{pmatrix}$

λ_{II} : $\underline{v_{II}} = \underline{e_r}$

λ_I : $\underline{\underline{M}}\,\underline{v} = \lambda_I \underline{v}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2v_r = 0 \\ 2v_\theta = 2v_z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v_r = 0 \\ v_\theta = v_z \end{matrix}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ A \end{pmatrix}$$

$\|\underline{v}\| = 1 \Rightarrow \sqrt{A^2 + A^2} = 1$

$\Rightarrow 2A^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $\underline{v_I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{III} : \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = -v_z \end{cases} \rightarrow v_{III} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

g. $\underline{\underline{\sigma}}^D = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\sigma}}$

$= \underline{\underline{\sigma}}$

d'où $\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\sigma}}^D : \underline{\underline{\sigma}}^D}$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2} \times 2 z^2} = \sqrt{3}\, z$$

$\sqrt{3}\, \tau \leq \sigma_y \Rightarrow \alpha \leq \frac{\sigma_y}{\sqrt{3} N R}$

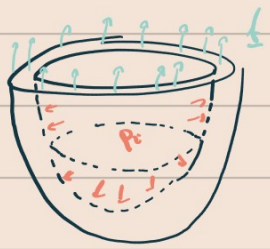
or, $C = \frac{\pi N \alpha R^3}{2}$

$\Rightarrow C_{max} = \frac{\pi R^3 \sigma_y}{2\sqrt{3}}$

Exercice 2 - Dimensionnement d'un réservoir sous pression

1. $$\begin{cases} \overline{\overline{\sigma}}(r=R_i, \theta, z) \cdot (-\underline{e_r}) = P_i \, \underline{e_r} \\ \overline{\overline{\sigma}}(r=R_e, \theta, z) \cdot (\underline{e_r}) = 0 \, \underline{e_r} \\ \overline{\overline{\sigma}}(r, \theta, z=h) \cdot (\underline{e_z}) = \underline{f} \\ \overline{\overline{\sigma}}(r, \theta, z=-h) \cdot (-\underline{e_z}) = -\underline{f} \end{cases}$$

2. On isole le fond de bouteille :



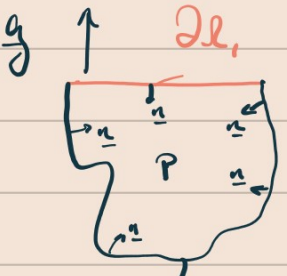
$$\int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} \underline{f} \, r \, d\theta \, dr - P_i \, \pi R_i^2 \, \underline{e_z} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{f} \, \frac{R_e^2 - R_i^2}{2} \, 2\pi = P_i \, \pi R_i^2 \, \underline{e_z}$$

$$\Rightarrow \underline{f} = P_i \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \, \underline{e_z}$$

Remarque sur le calcul de résultante de face de pression :

En statique, les résultants des faces de pression uniforme sur une surface fermée sont nulles.



$$\iint_{\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} -p \, \underline{n} \, dS = \underline{0}$$

On peut alors trivialiser le calcul de $\iint_{\partial\Omega_1} -p \, \underline{n} \, dS$ en remarquant $\iint_{\partial\Omega_1} -p\underline{n} \, dS = -\iint_{\partial\Omega_2} -p\underline{n} \, dS$

d'où $\iint_{\partial\Omega_1} -p\underline{n} \, dS = -\iint_{\partial\Omega_2} p \, dS \, \underline{e_z} = -p \, \pi R^2 \, \underline{e_z}$

3. Sym : $u_\theta = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ | d'où $\underline{u} = u_r(r,z)\,\underline{e_r} + u_z(r,z)\,\underline{e_z}$

→ ici pas si simple



$\mathcal{E}$ inv. par z :

$$\underline{u} = u_r(r)\,\underline{e_r} + u_z(z)\,\underline{e_z}$$

4. En l'absence de force de volume et en quasi-statique :

$$\text{Navier} - (\lambda + \mu)\,\underline{\nabla}(\operatorname{div}\underline{u}) + \mu\,\Delta\underline{u} = 0$$

$$\operatorname{div} \underline{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

ici : $\operatorname{div}(\underline{u}) = u'_r(r) + \frac{u_r}{r} + u'_z(z)$

$$\underline{\nabla} \operatorname{div}(\underline{u}) = \frac{\partial \left(u'_r(r) + \frac{u_r}{r} + u'_z(z) \right)}{\partial r} \underline{e_r}$$

$$+ u''(z) \underline{e_z}$$

$$= u''_r(r) + \frac{u'_r(r)}{r} - \frac{u_r(r)}{r^2} \underline{e_r} + u''_z(z) \underline{e_z}$$

$$\Delta \underline{u} = \left(u''_r + \frac{u'_r}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) \underline{e_r} + u''_z \underline{e_z}$$

Saint Venant : $(\lambda + 2\mu) \begin{bmatrix} u''_r(r) + u'_r(r) - \frac{u_r(r)}{r^2} \\ 0 \\ u''_z(z) \end{bmatrix} = 0$

sur u_z : $u''_z(z) = 0 \Rightarrow u_z = Az + B$ → simple translation sur l'axe, on peut prendre $B = 0$.

sur u_r : $u''_r(r) + \frac{u'_r(r)}{r} - \frac{u_r(r)}{r^2} = 0$

$\Rightarrow r^2 u'' + u' r - u = 0$

On cherche u sous la forme $u = r^m$

$\Rightarrow r^2 m(m-1) r^{m-2} + r m r^{m-1} - r^m = 0$

$$\Rightarrow \left(m(m-1) + m - 1\right) r^m = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = \pm 1$$

d'où $u_r = C r^1 + D r^{-1}$

$$= C r + \frac{D}{r}$$

Soit :

$$\underline{u} = \left(C r + \frac{D}{r}\right) \underline{e_r} + A z \, \underline{e_y}$$

5. $$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} u_{r,r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & u_{z,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C - \frac{D}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & C + \frac{D}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

6. $\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \, \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}} \, \underline{\underline{1}}$ $\quad \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}} = (2C + A)$

$$= \begin{pmatrix} 2\mu\left(C - \frac{D}{r^2}\right) + \lambda(2C + A) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\left(C + \frac{D}{r^2}\right) + \lambda(2C + A) & 0 \\ & & 2\mu A + \lambda(2C + A) \end{pmatrix}$$

7) • $2\mu\left(C - \frac{D}{R_i^2}\right) + \lambda(2C+A) = -P_i$

• $2\mu\left(C - \frac{D}{R_e^2}\right) + \lambda(2C+A) = 0$

• $2\mu A + \lambda(2C+A) = P_i \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$

$R_i^2 \times (1) - R_e^2 \times (2) \Rightarrow (1')$: $2\mu C\left(R_i^2 - R_e^2\right) + \lambda(2C+A)\left(R_i^2 - R_e^2\right) = -P_i R_i^2$

$(1) - (2)$: $2\mu A\left(\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{R_i^2}\right) = -P_i$

$R_i^2 \times (1) - R_e^2 \times (2) - (R_i^2 - R_e^2) \times (3)$: $2\mu(C-A)\left(R_i^2 - R_e^2\right) = 0$

D'où

$$(2\mu + 3\lambda)C = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

$$2\mu D = P_i \frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

$$C = A$$

$$\sigma_{rr} = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 - \frac{R_e^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 + \frac{R_e^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

Résolution en contrainte

Bilan des equations :

Equilibre $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0 \quad (\underline{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\underline{\sigma}})$

Comportement : $\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}}$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

Compatibilité $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right)$

CL : $\forall n \in \partial\Omega_u \quad u \cdot n = u_d$

$\forall n \in \partial\Omega_f \quad \underline{\underline{\sigma}}(n)\,\underline{n} = f_d$

Méthodologie de l'approche en contraintes :

1. Postuler la forme du tenseur des contraintes
2. vérifier les equations d'équilibres.
3. Calculer le tenseur de déformations par la comp.
4. intégrer la déformation pour remonter au champ de dépl.
5. Utiliser les CLs pour identifier les CLs d'intégration.

Note sur la notion de compatibilité.

Si on postule un tenseur de cathainte, duquel on déduit un tenseur de déformation. L'equation de compatibilité $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}_{sym}(\underline{u})$ peut être violée, il faut vérifier que ce champ "dérive" bien d'un déplacement.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\right) \Leftrightarrow \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0$$

Remarque : De la même manière qu'en combinant les équations de l'approche en depl, pour l'élasticité linéaire, isotrope on aboutissait à une unique équation en depl, on peut combiner les eq. de l'approche en contrainte.

$$\underline{\underline{\text{div}}}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f_v} = 0$$

$$\underline{\underline{\nabla}}\left(\text{div}(\underline{\underline{\sigma}})\right) + \underline{\underline{\nabla}}\left(\text{div}(\underline{\underline{\sigma}})\right)^t - \underline{\underline{\nabla}}\left(\underline{\underline{\nabla}}(\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}))\right) - \underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{\sigma}} = 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\lambda_1 \nu}{E}\,\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}} - \frac{\nu}{E}\,\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$



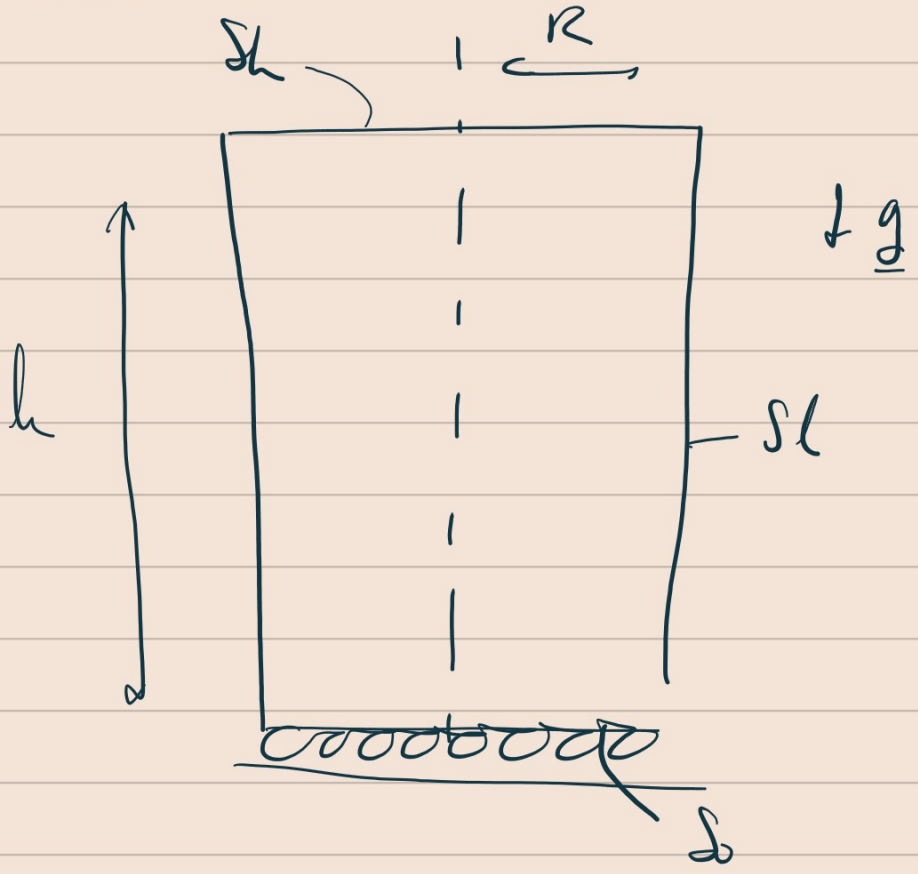
$\hookrightarrow$ $\underline{\text{grad}}\,\text{div}(\underline{a}) - \underline{\text{rot}}\,\underline{\text{rot}}\,\underline{a} = \underline{\Delta}\,\underline{a}$ pour un tenseur d'ordre 2.

$\Rightarrow$ Beltrami : $\underline{\underline{\Delta}}\,\underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{1+\nu}\,\underline{\underline{\nabla}}\left(\underline{\underline{\nabla}}\left(\text{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\right)\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\,\text{div}\left(\underline{f_v}\right)\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{f_v} + \left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{f_v}\right)^t = \underline{\underline{0}}$

$+$ $\underline{\underline{\text{div}}}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0$ et CLs.

St Venant.

Exercice 1



Sur S_h : $\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,h) \cdot \underline{e_z} = \underline{0}$

S_l : $\underline{\underline{\sigma}}(R,\theta,h) \cdot \underline{e_r} = \underline{0}$

S_0 : $\underline{u}(r,\theta,0) \cdot \underline{e_z} = 0$ $\quad \underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,0)\,\underline{e_z} \cdot \underline{e_\theta} = 0$

$\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,0)\,\underline{e_z} \cdot \underline{e_r} = 0$

$\mathcal{L}$. axisy + $\forall$ S_l libre : forme composant selon $\underline{e_r}, \underline{e_\theta}$ nulle.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

inv. θ :

$\sigma = \sigma_{zz}(z)\, \underline{e_z} \otimes \underline{e_z}$.

3. $\underline{\underline{\text{div}}}\ \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \underline{0}$

ici $\underline{f} = -\rho g \underline{z}$

d'où $\frac{d\sigma_{zz}}{dz} - \rho g = 0$

$\Rightarrow \sigma_{zz} = \rho g z + C_1$.

4. On a :

$\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, h) \cdot \underline{z} = \underline{0}$

$\Rightarrow \sigma_{zz}(r, \theta, h) = 0$

$\Rightarrow \rho g h + C_1 = 0$

$\Rightarrow C_1 = -\rho g h$

Soit $\underline{\underline{\sigma}} = \rho g (z - h)\, \underline{e_z} \otimes \underline{e_z}$

5. Dans Beltrami il n'y a que des dérivées secondes.
σ_{zz} est linéaire
$\Rightarrow$ Beltrami trivialement vérifié.

6. $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{1}}$

$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{\rho g (z-h)}{E}$ $\qquad \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$

$= -\frac{\nu \rho g (z-h)}{E}$

7. $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$ (1) $\quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(u_{r,z} + u_{z,r}\right)$ (3)

$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right)$ (2)

$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ (3)

⋮

On doit $u_\theta = 0$ (axisym.)

(2) $\Rightarrow u_r = -\nu \frac{\rho g}{E}(z-h)\, r$

(3) $\Rightarrow \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\rho g (z-h)}{E}$

$\Rightarrow u_z = \frac{\rho g}{E}\left(\frac{z^2}{2} - hz\right) + \psi(r)$

(3) $\Rightarrow \psi' = -u_{r,z} = \frac{\nu \rho g}{E} r$

$\Rightarrow \psi = \frac{\nu \rho g}{2E} r^2 + \cancel{c_1}$

↳ car sol part. de u_z.

$\underline{u} = -\nu \rho g \frac{z-h}{E} r\, \underline{e_r} + \frac{\rho g}{2E}\left(z^2 - 2hz + \nu r^2\right) \underline{z}$

$+ u_{\text{comp. rig.}}$

incompatible avec CL en $z = 0$.

8. On transforme la cond. en type

$$\underline{R} = \rho g h \times \pi R^2 \underline{e_z}$$

la poussée d'Archimède

$$-\nabla_{ext}(U)\, \pi R^2 \underline{e_z} = \underline{R}$$

Ω : Open Sym.

Σ est ouverte.

Ω est étoilé par rapport à O.

Ω est connexe par arcs :

par l'axe $(O, \underline{e_z})$:

PC3 - 12/12/2025 -

Exercice 1 - Échauffement d'une bi-lame homogène -

1/ $\mathcal{T} \in (\mathcal{S}A)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{T}} = \underline{0} \\ \underline{T} = \underline{0} \quad x = L \\ T_y = T_z = 0 \quad \text{en } x = 0 \\ \underline{T} = 0 \quad \text{en } y = \pm e \\ T_x = T_y = 0 \quad \text{en } z = \pm l/2 \end{cases}$$

$\underline{\}}$ CA

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \}_x (x = 0) = 0 \\ \}_z \left(z = \pm l/2 \right) = 0 \end{cases}$$

↳ le pb est bien posé -

2/ Intuitivement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \, \underline{e}_\zeta \otimes \underline{e}_\zeta$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^e} + \frac{\alpha\,\theta\,\underline{\underline{1}}}{\varepsilon^{th}}$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\,\sigma\,\underline{e}_\zeta \otimes \underline{e}_\zeta - \frac{\sigma\nu}{E}\,\underline{\underline{1}} + \alpha\,\theta\,\underline{\underline{1}}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sigma\nu}{E} + \alpha\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma\nu}{E} + \alpha\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma/E + \alpha\theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{\xi} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{x} + \underbrace{\underline{\omega} \wedge \underline{x} + \underline{c}}_{\text{Rigid body motion}}$$

$$\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\xi} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{W}}$$

↳ Hooke.

$$\text{On } \xi = -\frac{\sigma\nu}{E}\left(x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y\right) + \frac{\sigma}{E}\,z\,\underline{e}_\zeta + \alpha\,\theta\,\underline{x}$$

$$\xi_z\left(\zeta = \pm \ell/2\right) = \pm\left(\frac{\sigma}{E}\,\ell/2 + \alpha\,\theta\,\ell/2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = -\alpha \tau E}$$

$$\underline{\underline{\xi}} = +\alpha\tau(1+\nu)\left(x\,\underline{e_x} + y\,\underline{e_y}\right)$$

c/ $$\underline{\underline{\xi}}\begin{pmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\tau(1+\nu)C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bi - lame hétérogène.

a/ • Adhésion parfaite : $\underline{\underline{\xi}}(y=0^+) = \underline{\underline{\xi}}(y=0^-)$

• $\underline{\underline{T}}(y=0^+) = \underline{\underline{T}}(0^-)$

b/ $\underline{\underline{\sigma}}$ continu par morceaux.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{cases} \sigma^+ \underline{e_y}\otimes\underline{e_y} & \mathcal{R}^+ \\ \sigma^- \underline{e_y}\otimes\underline{e_y} & \mathcal{R}^- \end{cases}$$

et RM :

$$\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{e_y} = 0 = \underline{\underline{\sigma}}^+\cdot\underline{e_y} \quad \text{en } y=0.$$

De manière analogue,

$$\underline{\underline{\xi}} = \begin{cases} \frac{\sigma^+}{\varepsilon^+} y \otimes y + \frac{\omega^+ \sigma^+}{\varepsilon^+} (e_x \otimes e_x + y \otimes y) + \alpha^+ \tau \underline{\underline{1}}, & \Omega^+ \\ \frac{\sigma^-}{\varepsilon^-} y \otimes y + \frac{\omega^- \sigma^-}{\varepsilon^-} (e_x \otimes e_x + y \otimes y) + \alpha^- \tau \underline{\underline{1}}, & \Omega^- \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{cases} \alpha^+ (1+\omega^+) \tau \, (x \, e_x + y \, e_y) & \Omega^+ \\ \alpha^- (1+\omega^-) \tau \, (x \, e_x + y \, e_y) & \Omega^- \end{cases}$$

parce que cette solution simple fonctionne, on doit avoir :

$$T^+(x,0,t) = T^-(x,0,t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha^+ (1+\omega^+) = \alpha^- (1+\omega^-)}$$

De plus, $\underline{\underline{\Psi}} = \begin{cases} -\alpha^+ \varepsilon^+ \tau \, y \otimes y & \Omega^+ \\ -\alpha^- \varepsilon^- \tau \, y \otimes \underline{\underline{1}} & \Omega^- \end{cases}$

Thermostat.

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\Psi}} = \underline{0} \quad \checkmark$$

$$\Psi^+ (y=0) \, e_y = \begin{pmatrix} \sigma_x^+ & 0 & \\ & & \sigma_z^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Psi \cdot e_x \, (x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma_x + \beta^+ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

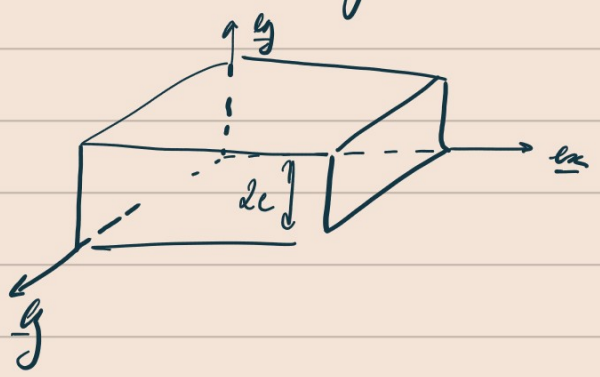
si $\beta^+ \neq 0$

$\Rightarrow$ chauffage BC Dirichlet.

Exercice sur la bilame.

I) Bilame homogène.

1.



1. Équilibre : $\underline{\text{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f_v} = 0$

comportement : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} + \alpha\theta\underline{\underline{1}}$

avec compatibilité : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} + \underline{\underline{\nabla}}\underline{u})$

CL : $x = 0$: $\underline{u} \cdot \underline{e_x} = 0$

$\underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e_x}) \cdot \underline{e_y} = 0$

$\underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e_x}) \cdot \underline{e_y} = 0$

$x = L$ $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e_x} = \underline{0}$

$y = \pm e$ $\underline{\underline{\sigma}} \cdot (\pm \underline{e_y}) = \underline{0}$

$z = \pm l/2$ $\underline{u} \cdot \underline{e_y} = 0$

$\underline{\underline{\sigma}} \cdot (\pm \underline{e_y}) \cdot \left| \begin{matrix} \underline{e_y} = 0 \\ \underline{e_x} = 0 \end{matrix} \right.$

2. Une seule direction contraint uniformément la déf :
$\Rightarrow$ état de compression dans la direction $\underline{e}_z$
$\rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_0 \, \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$

$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ car $\sigma_0 = cst$.
donc l'équilibre est vérifié.

3. $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{elast} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$

$$= \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}} \, \underline{\underline{1}} + \alpha\theta \, \underline{\underline{1}}$$

$$= \frac{\sigma_0}{E} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - \frac{\nu}{E} \sigma_0 \left(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \right) + \alpha\theta \, \underline{\underline{1}}$$

$$= \begin{pmatrix} -\nu/E \, \sigma_0 + \alpha\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\nu/E \, \sigma_0 + \alpha\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0/E + \alpha\theta \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ est uniforme : toutes les dérivées secondes sont nulles,

et $\operatorname{rot}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0$: compatible.

4. $\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} = \dfrac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\Omega}}$ avec $\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} - {}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} \right)$

$\Rightarrow \underline{u} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{x} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{x} + \underline{c}$ (cas rigide)

$\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{x} = \underline{\omega} \wedge \underline{x}$

d'où $\underline{u} = \left(-\nu/E\,\sigma_0 + \alpha\theta\right)\left(x\,\underline{e_x} + y\,\underline{e_y}\right)$

$$+ \left(\frac{\sigma_0}{E} + \alpha\theta\right) z\,\underline{e_y}$$

$$+ \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underline{c}$$

$$= \left(-\nu/E\,\sigma_0 + \alpha\theta\right)\left(x\,\underline{e_x} + y\,\underline{e_y}\right) + \left(\frac{\sigma_0}{E} + \alpha\theta\right) z\,\underline{e_y}$$

$$+ \left(\omega_y z - \omega_z y\right)\underline{e_x} + \left(\omega_z x - \omega_x z\right)\underline{e_y}$$

$$+ \left(\omega_x y - \omega_y x\right)\underline{e_z} + \underline{c}$$

Sur $x = 0$: $u_x(0, y, z) = 0 \quad \forall y, z$.

$$\Rightarrow \omega_y = \omega_z = 0 = c_x$$

Sur $z = \pm l/2$: $u_z\left(x, y, \pm l/2\right) = 0 \quad \forall x, y$

$$\pm l/2\left(\frac{\sigma_0}{E} + \alpha\theta\right) + \omega_x y - \omega_y x + c_z = 0$$

$$\Rightarrow \omega_x = 0$$

$$\pm l/2\left(\frac{\sigma_0}{E} + \alpha\theta\right) + c_z = 0 \quad (= 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_0 = -\alpha\theta E}$$

d'où $\underline{\underline{\sigma}} = -E\alpha\theta\ \underline{e_y} \otimes \underline{e_y}$

$$\underline{u} = \alpha(1+\nu)\theta(x\,\underline{e_x} + y\,\underline{e_y}) + c_y\,\underline{e_y}$$

Si barre hétérogène :

$$[\![\underline{u}]\!] = \underline{0} \Rightarrow \underline{u}(y=0^-) = \underline{u}(y=0^+) \quad \text{sur } \mathcal{S}$$

$$[\![\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} = \underline{0}]\!] \rightarrow [\![\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{e_y}]\!] = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^+\underline{e_y} - \underline{\underline{\sigma}}^-\underline{e_y} = \underline{0}$$

physiquement ($\underline{n}^- = \underline{e_y}$, $\underline{n}^+ = -\underline{e_y}$)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^-\underline{e_y} + \underline{\underline{\sigma}}^+\cdot(-\underline{e_y}) = \underline{0}$$

$$\underline{T}(0^-) = -\underline{T}(0^+)$$

1. On cherche par analogie

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \sigma^+\ \underline{e_x} \otimes \underline{e_x} & \text{dans } \mathcal{S}^+ \\ \underline{\underline{\sigma}} = \sigma^-\ \underline{e_x} \otimes \underline{e_x} & \text{dans } \mathcal{S}^- \end{cases}$$

par donnaire le développement précédent tiennent.

d'où $\underline{\underline{\sigma}}^{\pm} = -E^{\pm}\alpha^{\pm}\theta\ \underline{e_y} \otimes \underline{e_y}$

$$\underline{u}^{\pm} = \alpha^{\pm}(1+\nu^{\pm})\theta(x\,\underline{e_x} + y\,\underline{e_y}) + c_y^{\pm}\,\underline{e_y} \quad \text{dans } \mathcal{S}^{\pm}$$

8. En $y=0$ on doit avoir $u^+(x,0^+,t) = u^-(x,0^-,t)$
$\forall x, y$

d'où $\alpha^+(1+\nu^+)\theta \times \underline{e_x} = \alpha^-(1+\nu^-)\theta \times \underline{e_x}$
et $q^+ = q^-$

d'où $\alpha^+(1+\nu^+) = \alpha^-(1+\nu^-)$

Sinon dépl. non uniforme dans $\Omega^\pm$ et contrainte.

9.

Résolution par la minimisation de l'énergie potentielle.

Objectif. En général, lorsque le problème que l'on souhaite résoudre porte sur une géométrie et/ou un chargement complexe, il n'est plus possible de déterminer de solution exacte à notre problème. Il est alors possible de déterminer des solutions approchées, c'est le sujet de ce chapitre.

On rappelle le problème d'élastostatique étudié dans le cadre de ce cours :

Équilibre : $\underline{\underline{\operatorname{div}}}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \underline{0}$ $\quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}$

Compatibilité : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\nabla}\,\underline{u} + {}^{t}\underline{\nabla}\,\underline{u}\right)$

Conditions aux limites : $\underline{u} = \underline{u_d}$ sur $\partial\Omega_u$

$\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} = \underline{f_d}$ sur $\partial\Omega_f$.

L'objectif de ce chapitre est de montrer que ce problème est équivalent à la minimisation d'une énergie. Il ne s'agit pas là d'introduire une nouvelle physique mais une reformulation du problème sous forme faible puis sous forme de minimisation.

La résolution de ce problème de minimisation mène à la solution exacte si celle ci appartient à l'espace sur lequel on effectue la minimisation. En se plaçant dans un sous espace ne contenant pas la solution, on peut alors tenter de lui en trouver une approximation en trouvant l'élément de ce sous espace minimisant l'énergie du problème lorsqu'une telle énergie existe.

! Dans le cadre de forces non conservatives par exemple, où la force ne dérive pas d'un potentiel, l'énergie mécanique n'est plus conservée et la solution ne minimise plus l'énergie potentielle du système.

↳ Frottement, non-HP il y a aussi les forces suiveuses.

Principe des travaux virtuels (PTV)

- Espaces d'admissibilité :

• Statiquement admissible (SA) :

un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^*$ est dit

SA ssi $\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{f}_d & \text{sur } \partial\Omega_f \end{cases}$

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^e$ → à ajouter dans le dictionnaire

• Cinématiquement admissible (CA)

Un champ de déplacement $\underline{u}^*$ est dit

CA ssi $\underline{u}^* = \underline{u}_d$ sur $\partial\Omega_u$

• Cinématiquement admissible à zéro (CA0)

Un champ de déplacement $\underline{u}^0$ est dit

CA0 ssi $\underline{u}^* = \underline{0}$ sur $\partial\Omega_u$.

Remarque : si on part d'un champ $\underline{u} \in CA$ que l'on perturbe pour obtenir un autre champ $\underline{u}^* \in CA$, la variation $\underline{u}^0$ vérifie $\underline{u}^0 = \underline{u}^d - \underline{u}^d$ sur $\partial\Omega_u$ donc $\underline{u}^0 \in CA0$.
Un champ $\underline{u}^0 \in CA0$ représente donc une variation admissible du déplacement autour d'un champ $\underline{u} \in CA$: $\underline{u} + \varepsilon \underline{u}^0 \in CA$.

Énoncé du PTV

« Un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^*$ est SA si et seulement si le travail de $\underline{\underline{\sigma}}^*$ dans les déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)$ associées à toute variation virtuelle $\underline{u}^0 \in CA0$ est égal au travail des effort extérieurs donnés dans ce même champ de $\underline{u}^0$,

$$\underline{\underline{\sigma}}^* \in SA \iff \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\, dV = W_{ext}(\underline{u}^0), \quad \forall \underline{u}^0 \in CA0$$

où $W_{ext} := \int_\Omega \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0 \, dV + \int_{\partial\Omega_f} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^0 \, dS$

Rq. · Cette équation s'appelle le principe des Travaux virtuels.

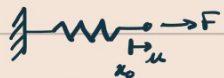
· Puisqu'on s'intéresse au travail de variation $\underline{u}^* \in CAO$ (donc nulle sur $\partial\Omega_u$), le travail des efforts de réaction (inconnus) est nul, ces efforts n'apparaissent pas dans W^{ext}, seuls des efforts connus y apparaissent.

· Les équations locales d'équilibres sont remplacées par une formulation intégrale (formulation variationnelle). Plutôt que de vérifier l'équilibre en tout point, on impose la nullité du travail pour toute variation virtuelle $\underline{u}^* \in CAO$ de déplacement. (Ce qui se traduit par la stationnarité de l'Ep quand elle existe, le PTV reste valable qu'une telle énergie existe ou non).

· Quand une énergie potentielle W existe, l'équilibre s'écrit comme la stationnarité de W dans toutes les directions admissibles $\underline{u}^*$:

$$\delta W(\underline{u})(\underline{u}^*) = 0 \quad \forall \underline{u}^* \in CAO.$$ ($\delta W(\underline{u})(\underline{u}^*)$ étant la dérivée de Gateaux de W dans la direction $\underline{u}^*$) : c'est le PTV ! Avec de plus $\subseteq$ défini positif, cette stationnarité est un minimum. c.f la suite de cette séance.

Analogie avec le ressort,



$$E_p = \frac{1}{2} k u^2 - \underbrace{F u}_{W_F}$$

u est une position d'équilibre $\Leftrightarrow$ u stationnaire $E_p \Leftrightarrow \frac{dE_p}{du} = 0$

$$\left(\frac{dE_p}{du} = 0 \Leftrightarrow k u - F = 0 \right)$$

autrement dit, la variation d'énergie par une petite variation δu est nulle à l'ordre 1.

$$E_p(u + \delta u) - E_p(u) = \underbrace{E_p'(u)}_{\delta E_p} \delta u + o(\delta u)$$

On veut $\delta E_p = 0$

$\Rightarrow E_p'(u)\, \delta u = 0 \quad \forall \delta u$ (cette quantité est ce qu'on va appeler un déplacement virtuelle, qui teste cette direction).

$\Rightarrow (k u - F)\, \delta u = 0 \quad \forall \delta u$

On peut poser $\delta u = \varepsilon u^*$ et puisque l'équation est linéaire on retrouve $(k u - F)\, u^* = 0 \quad \forall u^*$

Rq en MD δu est pas juste $E_p' = 0$ est artificiel mais en MC on ne peut pas dériver E_p par rapport à l'infinité de $y(x)$ en tout point.
→ notion de dérivée de fonctionnelle, c.f. plus loin.

Preuve : $\underline{\underline{\sigma}}^* \in SA \Rightarrow$ PTV :

$\underline{\underline{\sigma}}^* \in SA$

$\Rightarrow \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^* + \underline{f}_v = \underline{0}$

$\Rightarrow \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{u}^0 + \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0 = \underline{0}$

$\Rightarrow \int \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{u}^0 + \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0 = 0$

On rappelle que $\underline{\mathrm{div}}\,(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}^0)$

$= \left((\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u})_i \right)_{,i} = (\sigma_{ij} u_j)_{,i}$

$= \sigma_{ij,i} u_j + \sigma_{ij} u_{j,i}$

$= \underbrace{\sigma_{ji,i} u_j}_{\underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}^0} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}$

D'où : $\int_\Omega \underline{\mathrm{div}}\,(\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{u}^0)\, dV - \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}\, dV + \int_\Omega \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0\, dV = 0$

Thm de Green :

$\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}^0 \cdot \underline{n}\, dS - \int \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}\, dV + \int \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0\, dV = 0$

Par symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$:

$\int \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n}\, \underline{u}^0\, dS - \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\, dV + \int \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0\, dV = 0 \quad \forall \underline{u}^0 \in CAD$

$\left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{u} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j} \right.$

$= \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j} + \frac{1}{2} \underbrace{\sigma_{ji} u_{i,j}}_{= \sigma_{ij} u_{j,i}}$

$\left. = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{u} \right)$

Soit : $\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\, dV = \int_{\partial\Omega_u} \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n}\, \underline{u}^0 + \int_{\partial\Omega_f} \underline{\underline{\sigma}}^* \underline{n}\, \underline{u}^0 + \int_\Omega \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0 dV$

($\underline{u}^0 = \underline{0}$; $\underline{\underline{\sigma}}^* \underline{n} = \underline{T}$; $\underline{T} = \underline{f}_s$; Wext.)

PTV $\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^* \in$ SA.

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\, dV - \int_\Omega \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0\, dV - \int_{\partial\Omega_f} \underline{f}_s \cdot \underline{u}^0\, dS = 0 \quad \forall \underline{u}^0 \in \text{CAO}$$

de $\hat{u}$, $\underline{\underline{\sigma}}^*$ sym $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}$

d'où

$$\int \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}\, dV - \int \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0\, dV - \int_{\partial\Omega_f} \underline{f}_s \cdot \underline{u}^0\, dS = 0 \quad \forall \underline{u}^0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{u} = \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}^0) - (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{u}^0$$

d'où $\int_\Omega \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}^0)\, dV - \int_\Omega \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{u}^0 dV - \int \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0\, dV - \int_{\partial\Omega_f} \underline{f}_s \cdot \underline{u}^0 dS = 0$ $\forall u^0$

$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^* \underline{n} - \underline{f}_s) \cdot \underline{u}^0\, dS - \int_\Omega (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_v) \cdot \underline{u}^0\, dV = 0 \quad \forall u^0 \in \text{CAO}$

$= \int_{\partial\Omega_f} \underline{\underline{\sigma}} \underline{n}\, u^0\, dS$ car $\underline{u}^0 = \underline{0}$ sur $\partial\Omega_u$

Donc en choisissant judicieusement les $\underline{u}^0$ on peut montrer la relocalisation du pb en utilisant le lemme fondamental du calcul des variations

↳ il faut choisir pour Ω (resp $\partial\Omega$) une boule nulle sur $\partial\Omega$ (resp. Ω) centrée sur un point de Ω (resp $\partial\Omega$). par relocalisation.

Théorème d'unicité.

En élasticité linéaire (notamment, vrai en HPP avec Wint convexe),

- Le champ de déplacement, quand il existe, est unique à un déplacement de corps rigide CA près.

- Le champ de contrainte, quand il existe, est unique.

Preuve : Soit deux solutions distinctes : (u^1, σ^1), $(u^2, \sigma^2) \in (CA \times SA)^2$

Le PTV donne : $\int \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^i) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\, dV = W_{int}$, $\forall \underline{u}^0 \in CAO$, $i \in \{1, 2\}$

par linéarité en faisant (1) - (2) :

$$\int \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\, dV = 0 \quad \forall \underline{u}^0 \in CAO$$

On peut notamment prendre $\underline{u}^0 = \underline{u}^1 - \underline{u}^2$

$$\Rightarrow \int \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2)\, dV = 0 \quad \forall \underline{u}^0 \in CAO$$

$\underline{\underline{C}}$ est def positif donc $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) \geq 0$

(Rq : passage par Vrai pour la faire sortir).

cette qté doit donc être nulle pour annuler $\Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) = \underline{\underline{0}}$

$\underline{\underline{C}}$ def positif

Soit $\underline{u}^1$ et $\underline{u}^2$ différent à un corps rigide près.

Par ailleurs, $\underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{\sigma}}^2 = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^1 - \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^2$

$= \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^1 - \underline{\underline{\varepsilon}}^2)$

$= \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) = \underline{\underline{0}}$

D'où $\sigma^1 = \sigma^2$ et u^1 et u^2 ne diffèrent que d'un corps rigide.

Energie potentielle d'une configuration CA.

Soit $\underline{u}^* \in CA$, on définit :

- l'énergie élastique $W_{ela}(\underline{u}^*) = \frac{1}{2}\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*)\, dv$
- Le travail des efforts ext. $W_{ext}(\underline{u}^*) = \int_\Omega \underline{f_v} \cdot \underline{u}^*\, dV + \int_{\partial\Omega_f} \underline{f_d} \cdot \underline{u}^*\, dS$
- L'énergie potentielle totale $W(\underline{u}^*) = W_{ela}(u^*) - W_{ext}(u^*)$.

Théorème de l'énergie potentielle.

Le champ de déplacement $\underline{u}$ est solution du problème d'équilibre élastostatique ssi il possède la plus petite énergie potentielle parmi tous les champs de déplacement $\underline{u}^*$ cinématiquement admissibles :

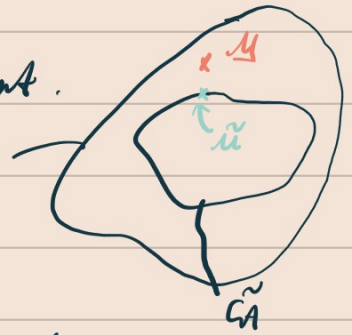
$$W(\underline{u}) \leq W(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in CA.$$

Remarque,

Ce thm permet de construire des solut approchées en depl lorsque la solut exacte est hors d'atteinte analytiquement :

1/ On restreint la recherche à un sous-espace simplifié (de dimension finie souvent) du champ admissible $C\tilde{A} \subset CA$.

2/ On minimise l'W dans ce sous espace restreint.



Si la solution exacte $\underline{u} \in C\tilde{A}$, par minimisation on la trouve sinon on trouve la meilleure solution approchée $\tilde{u} \in C\tilde{A}$.

La solut approchée sera d'autant plus proche de la solut exacte que $C\tilde{A}$ est riche et pertinent.

Preuve : Equilibre ⇒ Energie minimale.

$$W(\underline{u}^*) - W(\underline{u}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) - \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \right) dV - W_{ext}(\underline{u}^* - \underline{u})$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] dV - W_{ext}(\underline{u}^* - \underline{u})$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{2} \left[\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}) \right) : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}) \right) - \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] dV - W_{ext}(\underline{u}^* - \underline{u})$$

$$= \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}) + (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$= \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + 2\, \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}) + (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}})$$

↑ car sym de $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}}$

$$= \int \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}} \right) : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}} \right) + \underline{\underline{\underline{\underline{\Phi}}}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^* - \underline{\underline{\varepsilon}} \right) dV - W_{ext}(\underline{u}^* - \underline{u})$$

$\underline{\underline{\underline{\underline{\Phi}}}}$

$$= \int_\Omega \frac{1}{2} \Big(\underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^* - \underline{u}) : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^* - \underline{u})}_{\geq 0} dV + \underbrace{\int_\Omega \underline{\underline{\underline{\underline{\Phi}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^* - \underline{u}) dV - W_{ext}(\underline{u}^* - \underline{u})}_{= 0 \text{ par PTV avec } \underline{u}^* - \underline{u} \in C_{ad0}}$$

donc $\underline{u}$ minimise W.

· Énergie minimale ⇒ Équilibre.

Dérivée de Gateaux

$\underline{u}(x)$ de dim possiblement infini, d'où l'introduction de dérivée directionnel, la dérivée de Gateau. Plutôt que de dériver par $\underline{u}$ on se donne une direction $\underline{u}^0$ dans laquelle on étudie la variation.

$$h \mapsto W(\underline{u} + h\underline{u}^0)$$

h noté un scalaire

la dérivée de W en u dans la direction $\underline{u}^0$ est

$$\delta W(u; u^0) = \lim_{h \to 0} \frac{W(\underline{u} + h\underline{u}^0) - W(\underline{u})}{h}$$

En un minimum, la dérivée de Gateau est nulle dans toutes les directions:

Analogie avec le vecteur,
pour le vecteur on retrouve $\delta W = (k\underline{u} - F)\underline{u}^0$

1/ On considère une variation $\underline{u} + h\underline{u}^0$ autour du minimum $\underline{u}$

avec $\begin{cases} \underline{u} \in C_A \\ \underline{u}^0 \in C_{A0} \text{ d'où } \underline{u} + h\underline{u}^0 \in C_{A0} \end{cases}$

minimum donc dérivée de J dans nulle dans toutes les directions :

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{W(\underline{u} + h\underline{u}^0) - W(\underline{u})}{h} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(\tfrac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{u} + h\underline{u}^0) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u} + h\underline{u}^0) - W_{ext}(\underline{u} + h\underline{u}^0) - \tfrac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) + W_{ext}(\underline{u}) \Big) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big(\tfrac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u} + h\underline{v}^0) + \tfrac{1}{2} \underline{\varepsilon}(h\underline{u}^0) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u} + h\underline{v}^0) - W_{ext}(\underline{u} + h\underline{u}^0) - \tfrac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) + W_{ext}(\underline{u}) \Big) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h} \Big(\tfrac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) + \tfrac{1}{2} h\, \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}^0) + \tfrac{1}{2} h\, \underline{\varepsilon}(\underline{u}^0) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) + \tfrac{1}{2} h^2 \underline{\varepsilon}(\underline{v}^0) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}^0) - W_{ext}(\underline{u} + h\underline{u}^0) - \tfrac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) + W_{ext}(\underline{u}) \Big) = 0$$

↳ $\underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^0)$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \int \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^0)\, dV - W_{ext}(\underline{u}^0) + h\, W_{def}(\underline{u}^0) \Big| = 0$$

d'où $0 = \int \underbrace{\underline{\underline{C}} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^0)}_{\Psi} - W_{ext}(\underline{u}^0) \quad \forall \underline{u}^0$

c'est le PT V

d'où équilibre.

Bloc encastré, flexion simple.

1/ $\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} \end{cases}$

CL. $\underline{u}(0, x_2, x_3) = \underline{0}$

$\underline{\underline{\sigma}}(x_1 \pm h/2, x_3) \pm \underline{e_2} = \underline{0}$

$u_3(x_1, x_2, \pm h/2) = 0 \quad \underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, \pm h/2) \cdot \underline{e_2} \Big|_{\substack{e_1 = 0 \\ e_2 = 0}}$

$\underline{\underline{\sigma}}(L, x_2, x_3) = \tau \, \underline{e_2}$

2/ Méthode des analytiques :

On cherche sol espace 2 dim :

$$\underline{u}^{\alpha}(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 x_2 \underline{e_1} + \beta x_1^2 \underline{e_2}$$
$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

On vérifie $\underline{u}^{\alpha} \in CA \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

2) $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \alpha x_2 & \frac{1}{2}(\alpha + 2\beta) x_1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\alpha + 2\beta) x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Wclos : $\int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{\alpha}) : C : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{\alpha}) \, dV$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \lambda \left(\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{\alpha}) \right)^2 + 2\mu \, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{\alpha}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{\alpha}) \, dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left[(\lambda + 2\mu) (\alpha x_2)^2 + \mu (\alpha + 2\beta)^2 x_1^2 \right] b \, dx_1 dx_2$$

$$= 1/2 \left[\underbrace{(\lambda + 2\mu) \frac{bh^3}{12} L}_{C_1} \alpha^2 + \underbrace{\left(\frac{\mu b h L^3}{3} \right)}_{C_2} (\alpha + 2\beta)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} k_{11} \alpha^2 + k_{12} \alpha\beta + k_{22} \beta^2$$

$$k_{11} = C_1 + C_2 \qquad k_{12} = 2C_2 \qquad k_{22} = 4C_2$$

- Travail extérieur : (s'annule car x_2 imposé)

$$W_{ext} = \int_{\partial\Omega} \underline{t}_D \cdot \underline{u}^* = \int_{-h/2}^{h/2} \tau \underline{e}_2 \cdot \left(\alpha L x_2 \underline{e}_1 + \beta L^2 \underline{e}_2 \right) b \, dx_2$$

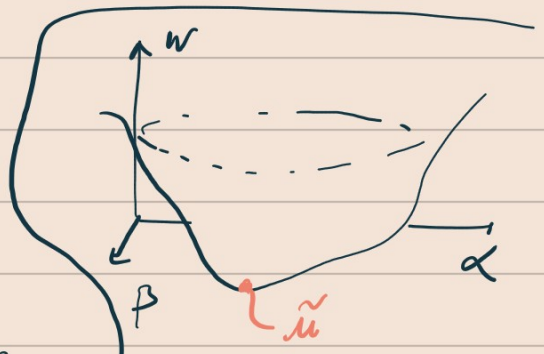
$$= \beta L^2 \tau h b \quad \text{et} \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau b \, dx_2 = -F$$

$$= -\beta L^2 F \qquad \Rightarrow \tau = -\frac{F}{bh}$$

Minimisation :

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = k_{11}\alpha + k_{12}\beta = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = k_{12}\alpha + k_{22}\beta = -FL^2$$



Paysage énergétique.

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k_{12} \\ -FL^2 & k_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{vmatrix}} = \frac{FL^2 k_{12}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{12}} = \frac{6FL}{(\lambda + 2\mu) bh^3}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} k_{11} & 0 \\ k_{12} & -FL^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{3FL}{(\lambda + 2\mu) bh^3} - \frac{3F}{4\mu bhL}$$