Élasticité linéaire

Table des matières

1 Séance 1 — Loi de comportement, élasticité linéaire isotrope et thermoélasticité 1
1.1 Rappels de mécanique des milieux continus . . . 1
1.2 Notion de loi de comportement . . . 4
1.3 Élasticité linéaire . . . 7
1.4 Élasticité linéaire isotrope . . . 9
1.5 Exercice : compression œdométrique . . . 15
1.6 Thermoélasticité . . . 16

2 Séance 2 — Critères de limite élastique et techniques de résolution analytique 17
2.1 Contrainte équivalente et surface seuil . . . 18
2.2 Techniques de résolution analytique . . . 19
2.3 TD 1 — Torsion d'un barreau cylindrique . . . 22
2.4 TD 1 — Dimensionnement d'un réservoir sous pression . . . 25

3 Séance 3 28

4 Séance 4 — Méthodes énergétiques : travaux virtuels et énergie potentielle 28
4.1 Résolution par la minimisation de l'énergie potentielle . . . 29
4.2 Application — Bloc encastré en flexion simple . . . 36

Version en ligne du cours et autres ressources : https://alexandredabyseesaram.github.io/.

1 Séance 1 — Loi de comportement, élasticité linéaire isotrope et thermoélasticité

Notes manuscrites de la séance : elasticite_2026_10_22.pdf.

1.1 Rappels de mécanique des milieux continus

Cette séance s'appuie sur ce que l'on sait du cours de mécanique des milieux continus (MMC). On rappelle ici les objets essentiels, dans l'hypothèse des petites perturbations qui sera celle de tout le cours.

1.1.1 Notations

> **Pour info : changement de notation**
>
> Dans ce cours, les vecteurs sont soulignés une fois et les tenseurs d'ordre 2 deux fois (les tenseurs d'ordre 4 quatre fois), au lieu des flèches utilisées en MMC :
>
> $$\vec{u} \to \underline{u}, \qquad \vec{a} \to \underline{M}, \qquad \vec{\vec{F}} \to \underline{\underline{F}}, \qquad \vec{\vec{\varepsilon}} \to \underline{\underline{\varepsilon}}, \qquad \vec{\vec{\sigma}} \to \underline{\underline{\sigma}}.$$

1.1.2 Cinématique d'un solide déformable

On sait décrire la cinématique d'un solide qui se déforme via :

- **la transformation** $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{X})$, qui associe à la position initiale $\underline{X}$ d'un point matériel sa position actuelle $\underline{x}$;
- **son gradient** $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}\underline{\varphi} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\underline{u}$, où $\underline{u}$ est le champ de déplacement ;
- **le tenseur des déformations** de Green–Lagrange

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left({}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}\right). \tag{1}$$

1.1.3 Hypothèse des petites perturbations (HPP)

> **Hypothèse des petites perturbations**
>
> C'est le cadre dans lequel on se place pour **tout ce cours** : $\|\underline{u}\| \ll 1$ (rapporté à une longueur caractéristique) et $\|\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\| \ll 1$.

1.1.3.1 Déformation linéarisée

En développant Équation 1 avec $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\underline{u}$:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left({}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}\right) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}}_{\text{linéaire}} + \underbrace{{}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\,\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}}_{\text{non linéaire}}\Big).$$

En HPP, $\|\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\| \ll 1$, donc ${}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\,\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} \simeq \underline{\underline{0}}$ et on obtient le **tenseur des déformations linéarisé** $\underline{\underline{\varepsilon}}$, tel que

$$\underline{\underline{E}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\right) = \underline{\underline{\nabla}}_{\text{sym}}\underline{u}. \tag{2}$$

> **Attention**
>
> On a bien rappelé cela et le fait que $\underline{\underline{\varepsilon}}$ n'est vrai qu'en HPP (cf. cours de MMC).

1.1.3.2 Interprétation : allongement relatif

Un petit segment matériel $d\underline{X} = \ell_0\,\underline{e}_i$ est transporté en $d\underline{x} = \underline{\underline{F}}\,d\underline{X}$. Sa longueur actuelle vaut

$$\|d\underline{x}\| = \sqrt{d\underline{x}\cdot d\underline{x}} = \sqrt{\underline{\underline{F}}\,d\underline{X}\cdot\underline{\underline{F}}\,d\underline{X}} = \ell_0\sqrt{\underline{\underline{F}}\,\underline{e}_i\cdot\underline{\underline{F}}\,\underline{e}_i}, \qquad \text{avec} \quad \underline{\underline{F}}\,\underline{e}_i\cdot\underline{\underline{F}}\,\underline{e}_i = {}^t(\underline{\underline{F}}\,\underline{e}_i)(\underline{\underline{F}}\,\underline{e}_i) = {}^t\underline{e}_i\,{}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{e}_i.$$

D'où l'**allongement relatif**, en utilisant ${}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} = 2\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\mathbf{1}}} \simeq 2\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\mathbf{1}}}$:

$$\frac{\|d\underline{x}\| - \|d\underline{X}\|}{\|d\underline{X}\|} = \sqrt{{}^t\underline{e}_i\,{}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{e}_i} - 1 = \sqrt{1+2\varepsilon_{ii}} - 1 \simeq \varepsilon_{ii}.$$

Donc ε_{ii} (sans sommation) **mesure l'allongement relatif dans la direction** $\underline{e}_i$.

1.1.3.3 Mesure de la variation de volume

En HPP,

$$\det\underline{\underline{F}} = \det\begin{pmatrix} 1+u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ \vdots & 1+u_{2,2} & u_{2,3} \\ \cdots & \cdots & 1+u_{3,3} \end{pmatrix} \simeq (1+u_{1,1})(1+u_{2,2})(1+u_{3,3}) \simeq 1+u_{1,1}+u_{2,2}+u_{3,3},$$

en enlevant à chaque étape les termes d'ordre élevé (qui font intervenir des produits $\sim u^2$). Ainsi

$$\det\underline{\underline{F}} \simeq 1 + \mathrm{tr}(\underline{\underline{\nabla u}}) = 1 + \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})).$$

D'où $dV \simeq (1+\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\,dV_0$, soit

$$\frac{dV - dV_0}{dV_0} = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}, \tag{3}$$

qui **mesure la déformation volumique**.

1.1.4 Contraintes

On a également introduit un objet décrivant les efforts à l'intérieur de la matière : le **tenseur des contraintes de Cauchy** $\underline{\underline{\sigma}}$.

Si l'on coupe le solide Ω en deux parties Ω^- et Ω^+, les efforts surfaciques exercés par Ω^- sur Ω^+ à travers un élément de surface dS de normale $\underline{n}$ sont donnés par le **vecteur contrainte** (Figure 1)

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}.$$

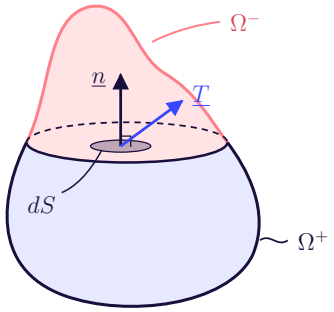

FIGURE 1 : Coupure du solide Ω en deux parties : à travers l'élément de surface dS de normale $\underline{n}$ (sortante de Ω^+), Ω^- exerce sur Ω^+ l'effort surfacique $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}$.

L'**équilibre** (principe fondamental de la dynamique) donne

$$\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_v = \rho\,\underline{\gamma} \quad \text{dans } \Omega, \qquad \underline{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\underline{\sigma}} \quad \text{dans } \Omega. \tag{4}$$

i Remarque : d'où vient l'équation locale ?

On part de ce que l'on connaît : le PFD, $\sum \underline{F} = m\,\underline{\gamma}$, écrit pour un sous-domaine **quelconque** $D \subset \Omega$:

$$\underbrace{\int_D \underline{f}_v\, dV}_{\text{efforts volumiques}} + \underbrace{\int_{\partial D} \underline{T}\, dS}_{\text{efforts surfaciques}} = \int_D \rho\,\underline{\gamma}\, dV.$$

Les efforts surfaciques se réécrivent avec $\underline{\underline{\sigma}}$, puisque $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}$, puis avec le **théorème de la divergence** :

$$\int_{\partial D} \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}\, dS = \int_D \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}\, dV.$$

On obtient donc

$$\int_D \left(\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_v - \rho\,\underline{\gamma}\right) dV = \underline{0} \qquad \text{pour tout } D \subset \Omega.$$

Comme cette égalité est vraie pour n'importe quel volume D, aussi petit soit-il, l'intégrande est nul en tout point : c'est l'équation locale (Équation 4). (La symétrie $\underline{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\underline{\sigma}}$ s'obtient de la même façon à partir de l'équilibre des moments.)

Les **conditions aux limites** sont de deux types :

- en **déplacement** (Dirichlet) : $\underline{u}(\underline{M}) = \underline{u}_d \quad \forall \underline{M} \in \partial\Omega_u$;
- en **effort** (Neumann) : $\underline{T}(\underline{M}) = \underline{F}_d \quad \forall \underline{M} \in \partial\Omega_f$.

1.1.5 Bilan de ce que l'on sait

Résoudre un problème de mécanique des milieux continus solides signifie trouver, en tout point $\underline{M} \in \Omega$:

Champ inconnu	Notation	Nombre d'inconnues
déplacement	$\underline{u}(\underline{M})$	3
déformations	$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{M})$	6
contraintes	$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{M})$	6
total		**15**

Pour cela, nous disposons, après le cours de MMC, des équations suivantes :

Équation	Nombre d'équations
$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\text{sym}}\,\underline{u}$ (compatibilité, Équation 2)	6
$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho\underline{\gamma}$ (équilibre, Équation 4)	3
total	**9**

1.2 Notion de loi de comportement

Il nous manque alors **6 équations** pour espérer pouvoir résoudre le problème de mécanique avec une logique purement comptable (on parle ici des équations dans le volume, pas des conditions aux limites).

En effet, les équations décrites plus haut ne décrivent que la cinématique et le respect du PFD, mais sont **aveugles à la matière** du solide étudié. Les 6 équations manquantes pour **fermer le problème** viennent décrire le comportement de la matière.

> Analogie avec le ressort
>
> — cinématique : $\Delta\ell = x - x_0$, analogue de $\underline{\underline{\varepsilon}}$;
> — PFD : $m\ddot{x} = F_{\text{ext}} - F_{\text{ressort}}$, analogue de $\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho\underline{\gamma}$;
> — c'est la **loi de Hooke** qui ferme le problème : $F_{\text{ressort}} = -k\,\Delta\ell$.

> ! Définition : loi de comportement
>
> Nous appelons **loi de comportement** la fonction tensorielle qui relie la contrainte et la déformation :
>
> $$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{F}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}(M,t),\, T,\, \ldots\right).$$

Des exemples de tracés illustrant certains liens $\underline{\underline{\varepsilon}}/\underline{\underline{\sigma}}$ sont donnés en Figure 2, qui compare la loi élastique linéaire à deux lois non linéaires :

— une loi **hyperélastique** : élastique mais non linéaire (courbe en S typique des caoutchoucs), la décharge suit le même chemin que la charge ;
— une loi **élastoplastique** : linéaire au début, puis non élastique au-delà d'un certain seuil, avec une déformation résiduelle ε^p après décharge.

Dans les deux cas, l'élasticité linéaire ne décrit que le comportement au voisinage de l'origine (pente E) : c'est cette zone, mise en évidence sur la figure, qui constitue le **cadre du cours**.

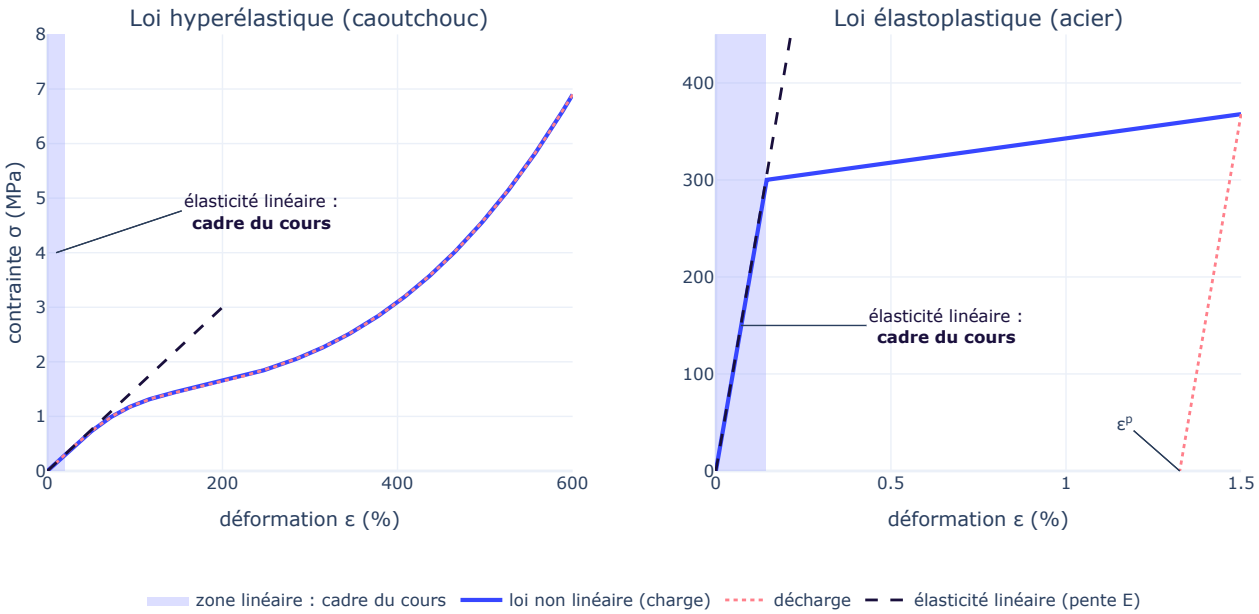

FIGURE 2 : Deux exemples de lois de comportement en traction, comparées à la loi élastique linéaire tangente à l'origine (pente E, en tirets). La zone bleu clair, où la loi se confond avec sa tangente, est le **cadre de ce cours** (élasticité linéaire). À gauche : loi hyperélastique en S (type caoutchouc) : seules les petites déformations relèvent de l'élasticité linéaire (HPP) ; charge et décharge suivent la même courbe. À droite : loi élastoplastique à écrouissage linéaire (type acier) ; la décharge se fait avec la pente E et laisse une déformation résiduelle ε^p. Valeurs illustratives.

Il existe une grande variété de comportements, et l'objet de ce cours est d'étudier l'**élasticité linéaire** :

Élasticité l'état de contrainte à un instant donné dépend **uniquement** de l'état de déformation à ce même instant (indépendamment de l'histoire du chargement et de la vitesse de chargement). Il n'y a pas de dissipation : le comportement est **réversible**.

Linéaire valide uniquement sous l'hypothèse HPP ; la relation reliant le tenseur des déformations linéarisé et le tenseur de Cauchy est **linéaire**.

> **i** Élasticité n'implique pas linéarité
>
> Les deux hypothèses sont **indépendantes**. Un matériau peut être **élastique sans être linéaire** : c'est le cas des matériaux **hyperélastiques** (caoutchoucs, élastomères, tissus biologiques mous), qui subissent de grandes déformations réversibles. La contrainte dérive toujours d'un potentiel élastique (comportement réversible, sans dissipation), mais ce potentiel n'est plus quadratique : la relation contrainte–déformation est non linéaire. L'élasticité linéaire n'en est que l'approximation au premier ordre, au voisinage de l'état naturel et sous l'hypothèse HPP.

1.2.1 Potentiel élastique

Puisque le travail de déformation est indépendant du chemin de chargement, la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ dérive d'un **potentiel** $w_{\text{élas}}$ tel que

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial w_{\text{élas}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \iff \sigma_{ij} = \frac{\partial w_{\text{élas}}}{\partial \varepsilon_{ij}}.} \tag{5}$$

On justifie ce résultat par analogie avec les forces conservatives.

> **i** Rappel : force conservative et énergie potentielle
>
> Par définition, une force est **conservative** si son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi. On part d'un point O arbitraire vers un point $\underline{M}$ et on pose
>
> $$E_p(\underline{M}) = -W_{O\to M}(\underline{F}) = -\int_O^M \underline{F}\cdot d\underline{x}.$$
>
> L'intégrale a une valeur unique car le travail ne dépend pas du chemin : $E_p(\underline{M})$ est donc une **fonction d'état**.
> Étudions la variation de E_p entre deux points $\underline{M}$ et $\underline{M}'$ infiniment proches :
>
> $$\begin{aligned} dE_p = E_p(\underline{M}') - E_p(\underline{M}) &= -\int_O^{M'} \underline{F}\cdot d\underline{x} + \int_O^M \underline{F}\cdot d\underline{x} && \text{(chemin indifférent + Chasles)} \\ &= -\int_M^{M'} \underline{F}\cdot d\underline{x} = -\underline{F}\cdot\int_M^{M'} d\underline{x} && (\underline{F} \text{ constante entre } \underline{M} \text{ et } \underline{M}') \\ &= -\underline{F}\cdot d\underline{x} && (\underline{M}' = \underline{M} + d\underline{x}). \end{aligned}$$
>
> Par identification avec $dE_p = \operatorname{grad}(E_p)\cdot d\underline{x}$, on obtient $\boxed{\underline{F} = -\operatorname{grad}(E_p)}$.

De manière analogue, le **travail élémentaire reçu par la matière** (opposé à celui fourni par les efforts intérieurs) vaut

$$\delta w = \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Puisque ce travail est indépendant du chemin, on peut définir une fonction univoque

$$w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \int_{\underline{\underline{0}}}^{\underline{\underline{\varepsilon}}} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}) : d\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}.$$

Alors

$$dw = w(\underline{\underline{\varepsilon}} + d\underline{\underline{\varepsilon}}) - w(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \int_{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\underline{\underline{\varepsilon}}+d\underline{\underline{\varepsilon}}} \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} \qquad (\underline{\underline{\sigma}} \text{ constant sur } d\underline{\underline{\varepsilon}}).$$

Par identification avec $dw = \dfrac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}$, on retrouve Équation 5 :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}.$$

i Remarques

1. Par rapport au travail avec $\underline{F}$, la force de rappel du ressort qui s'oppose au mouvement : ici, la convention est que $\underline{\underline{\sigma}}$ représente l'effort appliqué à la matière pour garantir sa cohésion. D'où les signes opposés : $\underline{F} = -\operatorname{grad}(E_p)$ mais $\underline{\underline{\sigma}} = +\dfrac{\partial w}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$.
2. δw représente un **échange d'énergie** avec l'extérieur (une *quantité* de travail fournie), tandis que dw représente la **variation d'énergie stockée** entre deux déformations proches.

1.3 Élasticité linéaire

1.3.1 Tenseur d'élasticité

$\underline{\underline{\sigma}}$ est linéaire en $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Cela signifie que chaque composante de $\underline{\underline{\sigma}}$ est une combinaison linéaire des composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ (indices liés à $\underline{\underline{\sigma}}$ en bleu, indices liés à $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en corail) :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{1111}\,\varepsilon_{11} + C_{1112}\,\varepsilon_{12} + C_{1113}\,\varepsilon_{13} + \cdots \\ &\vdots \\ \sigma_{33} &= C_{3313}\,\varepsilon_{13} + C_{3323}\,\varepsilon_{23} + C_{3333}\,\varepsilon_{33} + \cdots \end{aligned}$$

D'où l'introduction d'un **tenseur d'ordre 4** (quatre indices) $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$, appelé **tenseur d'élasticité linéaire**, tel que

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \iff \sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}, \qquad \text{soit, par identification,} \quad C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}. \tag{6}$$

1.3.2 Potentiel élastique linéaire

Dans le cas de l'élasticité linéaire, on a donc

$$\boxed{w_{\text{élas}} = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{7}$$

et l'on retrouve bien

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial w_{\text{élas}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Analogie avec le ressort

$$w_{\text{élas}} = \frac{1}{2}\, k\, \Delta\ell^2, \qquad F_{\text{ext}\to\text{ressort}} = \frac{\partial w_{\text{élas}}}{\partial \Delta\ell} = k\, \Delta\ell \ (= -F_{\text{rappel}}).$$

1.3.3 Symétries et composantes indépendantes

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ est un tenseur d'ordre 4 de $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ composantes. Cependant, du fait des symétries de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$, on peut réduire le nombre de composantes indépendantes.

Petites symétries (héritées de $\underline{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}} = {}^t\underline{\underline{\varepsilon}}$) :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \qquad \text{et} \qquad C_{ijkl} = C_{ijlk}.$$

Grande symétrie (héritée de l'existence du potentiel) :

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 w_{\text{élas}}}{\partial \varepsilon_{ij}\, \partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij}.$$

Décompte des composantes indépendantes

- Chacune des petites symétries fait passer le nombre de combinaisons d'indices indépendantes de 9 à 6 : $11, 22, 33$ puis $12, 13, 23$. Les petites symétries font donc tomber les $9 \times 9 = 81$ composantes à $6 \times 6 = 36$ (une matrice 6×6 en notation de Voigt).
- La grande symétrie impose à cette matrice 6×6 d'être **symétrique** : sur 36 cases, 6 sont sur la diagonale et 30 hors diagonale, dont seulement 15 indépendantes.

D'où $15 + 6 =$ **21 composantes indépendantes** pour le matériau élastique linéaire le plus général (anisotrope).

1.3.4 Notation de (Kelvin–)Voigt

Afin de permettre une résolution par algèbre linéaire classique, on « vectorise » (aplatit) les tenseurs symétriques d'ordre 2 que sont $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Remarque

La forme tensorielle est plus compacte et géométrique : la prise en compte des rotations et changements de base est simple, sans avoir à utiliser d'énormes matrices de rotation pour $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ (matrices de Bond). Le pire étant avec la notation de Voigt : il faut des matrices différentes pour σ et ε.

1.3.4.1 Notation de Voigt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\Sigma} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{16} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & \\ & \text{sym} & & C_{56} \\ & & & C_{66} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{E} \tag{8}$$

Astuce : l'ordre des composantes

Pour retenir l'ordre de Voigt, on parcourt la partie triangulaire supérieure de $\underline{\underline{\sigma}}$: d'abord la diagonale de haut en bas (σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}), puis on remonte la dernière colonne (σ_{23}, σ_{13}) et on finit par σ_{12} (Figure 3).

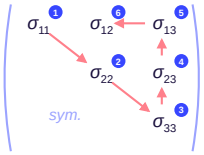

FIGURE 3 : Ordre des composantes dans la notation de Voigt.

Pourquoi des facteurs 2 ? Calculons le produit $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$, qui donne la **densité** d'énergie de déformation (énergie par unité de volume, $w_{\text{élas}} = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$) :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} &= \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33}\end{pmatrix}\\ &= \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2\,\sigma_{12}\varepsilon_{12} + 2\,\sigma_{13}\varepsilon_{13} + 2\,\sigma_{23}\varepsilon_{23}\\ &= \Sigma \cdot E.\end{aligned}$$

La densité d'énergie qui, avec les tenseurs, se calcule avec un produit doublement contracté, se calcule avec un **produit scalaire de vecteurs** en notation de Voigt.

1.3.4.2 Notation de Kelvin–Voigt

Attention

Avec la notation de Voigt, le produit scalaire euclidien classique de deux vecteurs n'est pas égal au produit doublement contracté des tenseurs associés : $\Sigma^a \cdot \Sigma^b \neq \underline{\underline{\sigma}}^a : \underline{\underline{\sigma}}^b$ et $E^a \cdot E^b \neq \underline{\underline{\varepsilon}}^a : \underline{\underline{\varepsilon}}^b$. Pour cela, il faut utiliser la notation de **Kelvin–Voigt**, plus rigoureuse.

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sqrt{2}\,\sigma_{23}\\ \sqrt{2}\,\sigma_{31}\\ \sqrt{2}\,\sigma_{12}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \cdots & \tilde{C}_{16}\\ & \ddots & & \vdots\\ & \text{sym} & & \tilde{C}_{56}\\ & & & \tilde{C}_{66}\end{bmatrix} \begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{23}\\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{31}\\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{12}\end{pmatrix} \tag{9}$$

1.4 Élasticité linéaire isotrope

1.4.1 Potentiel élastique isotrope

Nous supposons enfin que la loi de comportement est linéaire et **isotrope**, c'est-à-dire qu'elle est invariante par toute rotation $\underline{\underline{R}}$:

$$w_{\text{élas}}({}^t\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\underline{R}}) = w_{\text{élas}}(\underline{\underline{\varepsilon}}).$$

La loi de comportement doit donc uniquement dépendre des trois valeurs propres de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Il y a une bijection entre ces valeurs propres et les **invariants** du tenseur de déformation, mais ces derniers

sont plus commodes à utiliser : ils sont continûment dérivables partout (fonctions polynomiales des composantes) et permettent d'aboutir à des expressions tensorielles simples à la dérivation.

On cherche donc à écrire le potentiel élastique comme fonction des invariants

$$I_1 = \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}, \qquad I_2 = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \operatorname{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^2\right), \qquad I_3 = \det \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

La loi étant linéaire, on cherche une fonction **quadratique** (homogène de degré 2) des composantes. Le déterminant étant un produit de 3 composantes, il est d'ordre 3 : il ne reste que I_1^2 et I_2 :

$$\boxed{w_{\text{élas}} = \frac{\lambda}{2} \left(\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}\right)^2 + \mu\, \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{10}$$

où λ et μ sont deux constantes (paramètres matériaux) appelées **coefficients de Lamé**, exprimés en Pa.

1.4.2 Loi de Hooke isotrope

Pour trouver la loi de comportement associée à ce potentiel, on le dérive, en utilisant $\dfrac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_{ik}\, \delta_{jl}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} = \frac{\partial w_{\text{élas}}}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \left(\varepsilon_{kk}\right)^2}{\partial \varepsilon_{ij}} + \mu \frac{\partial \left(\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl}\right)}{\partial \varepsilon_{ij}} \\
&= \frac{\lambda}{2} \times 2\, \varepsilon_{kk} \frac{\partial \varepsilon_{mm}}{\partial \varepsilon_{ij}} + \mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \\
&= \lambda\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} + \mu \Big(\underbrace{\delta_{ik}\delta_{jl}\, \varepsilon_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}\, \varepsilon_{kl}}_{2\,\varepsilon_{ij}} \Big),
\end{aligned}$$

soit la **loi de Hooke** isotrope :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\, \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}.} \tag{11}$$

> **i** Remarque : dérivation directement en notation tensorielle
>
> On peut aussi obtenir ce résultat sans passer par les indices, en généralisant aux tenseurs d'ordre 2 les règles de dérivation usuelles : la double contraction « : » joue le rôle d'un produit, auquel on applique la règle de dérivation d'un produit.
> On peut ainsi voir que $\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}}$, d'où
>
> $$\frac{\partial \left(\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}\right)^2}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{\partial \left(\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}}\right)^2}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = 2 \times \underline{\underline{\mathbf{1}}} \times \left(\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}}\right) = 2\, \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{\mathbf{1}}},$$
>
> exactement comme $\dfrac{d\,(ax)^2}{dx} = 2\, a\, (ax)$ pour des scalaires. De même, $\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ est un « carré » :
>
> $$\frac{\partial \left(\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = 2\, \underline{\underline{\varepsilon}}.$$
>
> On retrouve donc $\underline{\underline{\sigma}} = \dfrac{\lambda}{2} \times 2\, \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \mu \times 2\, \underline{\underline{\varepsilon}} = \lambda\, \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}$.

1.4.3 Décomposition sphérique / déviatorique

Suivant l'interprétation que l'on veut avoir de cette loi, on peut la réorganiser en faisant intervenir le **déviateur** de $\underline{\underline{\varepsilon}}$,

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}},$$

qui caractérise la distorsion de forme sans prendre en compte la variation de volume ($\underline{\underline{e}}$ est à trace nulle). On peut alors écrire

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\left(\underline{\underline{e}} + \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}\right) = \underbrace{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)}_{K}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\,\underline{\underline{e}}, \tag{12}$$

où $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ est le **module de compressibilité**.

1.4.4 Exemples : donner du sens à μ et K

1.4.4.1 Exemple a : cisaillement simple

On considère un carré dont la base est bloquée et que l'on cisaille d'un angle γ (Figure 4) :

$$\underline{u} = \gamma\, X_2\, \underline{e}_1.$$

Alors

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\,\underbrace{\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})}_{0}\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} = \begin{pmatrix} 0 & \mu\gamma & 0 \\ \mu\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

μ peut aussi être noté G : c'est le **module de cisaillement**,

$$\mu = \frac{\sigma_{12}}{2\,\varepsilon_{12}}\left(= \frac{\sigma_{13}}{2\,\varepsilon_{13}} = \frac{\sigma_{23}}{2\,\varepsilon_{23}} \text{ suivant les directions dans lesquelles on cisaille}\right).$$

1.4.4.2 Exemple b : compression isostatique

On comprime un cube uniformément dans toutes les directions :

$$\underline{u} = \beta\, X_i\, \underline{e}_i, \qquad \beta < 0.$$

Alors

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \beta\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}, \qquad \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\underbrace{\beta\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \lambda \times \underbrace{3\beta}_{\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}}\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} = (2\mu + 3\lambda)\,\beta\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} = -p\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}.$$

On a donc, avec Équation 3,

$$\frac{\Delta V}{V} = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} = 3\beta = \frac{3\times(-p)}{2\mu + 3\lambda} = -\frac{p}{K},$$

d'où $K\ \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} = -p$, soit

$$\boxed{K\,\frac{\Delta V}{V} = -p.} \tag{13}$$

K relie donc directement la pression appliquée à la variation relative de volume. La Figure 5 permet de jouer avec β.

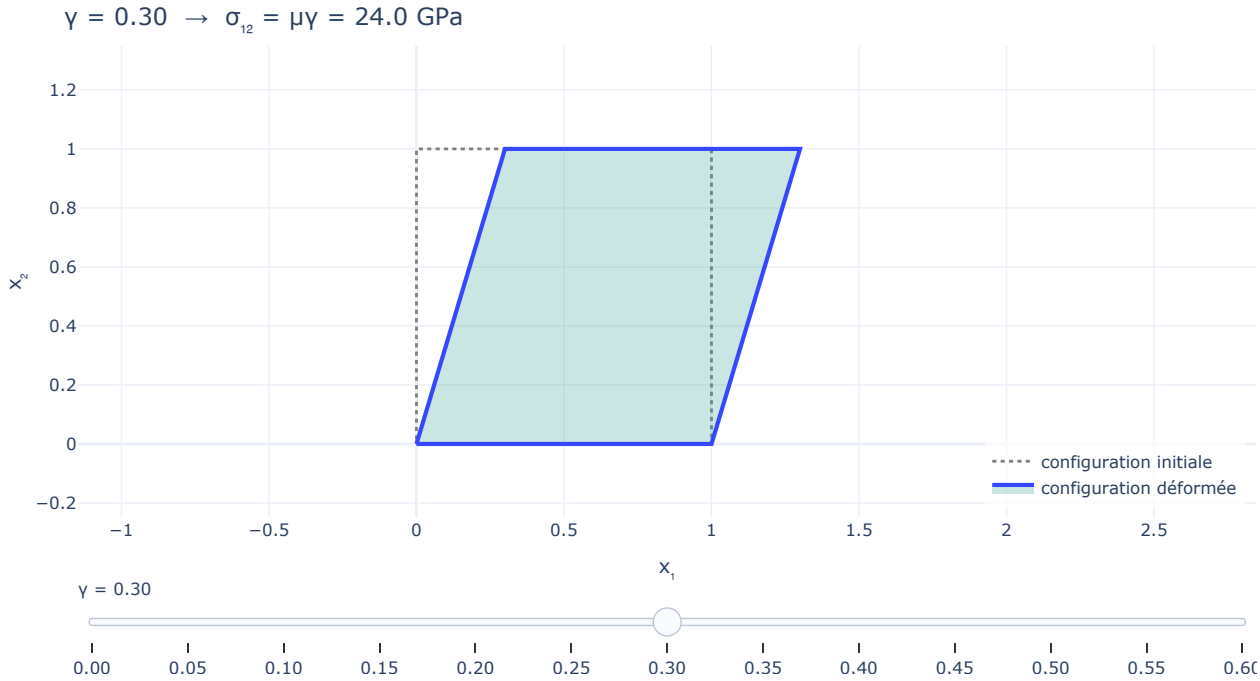

FIGURE 4 : Cisaillement simple $\underline{u} = \gamma X_2 \underline{e}_1$ d'un carré unité (base bloquée). Le curseur fait varier γ ; la valeur de $\sigma_{12} = \mu\gamma$ est donnée pour $\mu = 80$ GPa (acier). Les déformations sont exagérées pour la lecture.

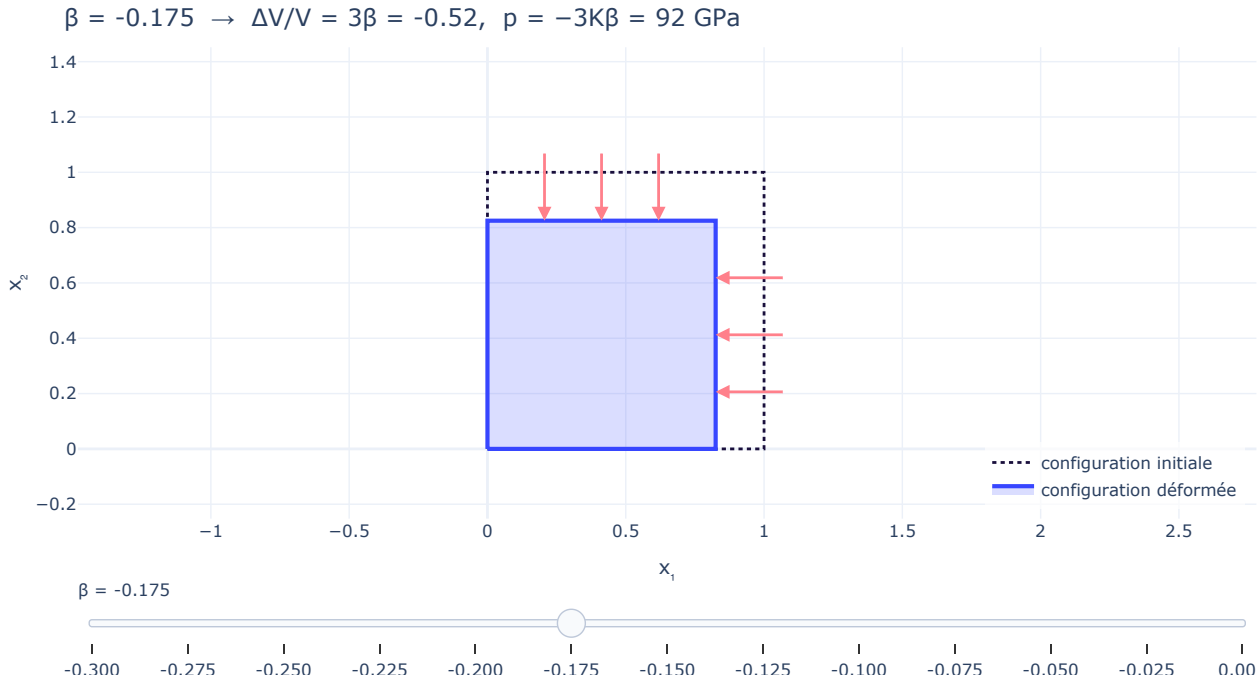

FIGURE 5 : Compression isostatique $\underline{u} = \beta X_i \underline{e}_i$ d'un cube unité (coupe dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, coin en O fixe). Le curseur fait varier β ; le titre donne $\Delta V/V = 3\beta$ et la pression $p = -3K\beta$ pour $K = 175$ GPa (acier). Les déformations sont exagérées pour la lecture.

1.4.5 Inversion de la loi de comportement

De manière analogue à $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$, on peut définir le **tenseur de souplesse** $\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{-1}$ tel que

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} : \underline{\underline{\sigma}}.$$

Le potentiel élastique peut alors se réécrire

$$w_{\text{élas}} = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} : \underline{\underline{\sigma}} \qquad \left(\text{analogie} : w_{\text{élas}} = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}\right).$$

Dans le cas isotrope, on peut mettre $\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}$ en exergue en inversant la loi Équation 11 reliant $\underline{\underline{\sigma}}$ à $\underline{\underline{\varepsilon}}$. On prend la trace de cette expression (avec $\operatorname{tr}\underline{\underline{\mathbf{1}}} = 3$) :

$$\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}} = 3\lambda\ \operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} + 2\mu\ \operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} = (2\mu + 3\lambda)\ \operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}.$$

D'où

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\lambda\ \operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}}}{2\mu + 3\lambda}\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu}\left[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\lambda\ \operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}}}{2\mu + 3\lambda}\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}\right].}$$

1.4.5.1 Module d'Young et coefficient de Poisson

En posant

$$\frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2\mu} \qquad \text{et} \qquad \frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda + 2\mu)},$$

la relation devient

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,(\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}.} \tag{14}$$

> **i** Calcul de E et ν en fonction de λ et μ
>
> $$\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} = \frac{1}{2\mu} \;\Rightarrow\; \frac{1}{E} = \frac{1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda + 2\mu)} = \frac{3\lambda + 2\mu - \lambda}{2\mu\,(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\lambda + \mu}{\mu\,(3\lambda + 2\mu)},$$
>
> soit $E = \dfrac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$. Puis
>
> $$1 + \nu = \frac{E}{2\mu} = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} - 1 = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

1.4.5.2 Exemple c : traction simple — donner du sens à E et ν

On considère un état de **traction pure** :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On utilise la loi de comportement Équation 14, qui permet de remonter à $\underline{\underline{\varepsilon}}$ depuis $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,\operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\,\sigma_{11}/E & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\,\sigma_{11}/E \end{pmatrix}.$$

D'où $\varepsilon_{11}\, E = \sigma_{11}$, et

$$\boxed{E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}} \qquad \boxed{\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}}$$

(en effet $-\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11} = \dfrac{\nu\,\sigma_{11}}{E} \times \dfrac{E}{\sigma_{11}} = \nu$).

E est le **module d'Young** (pente de la zone linéaire en traction, Figure 2) et ν le **coefficient de Poisson**, qui mesure la contraction transverse. La Figure 6 permet de jouer avec ν.

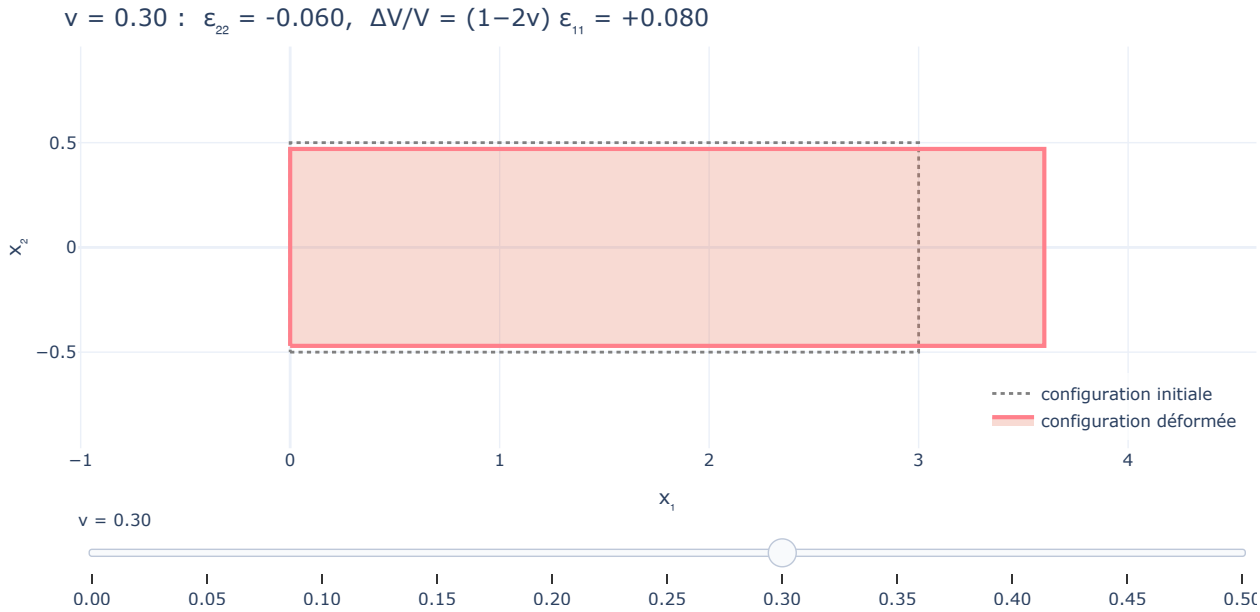

FIGURE 6 : Effet Poisson en traction simple : barreau de section carrée allongé de ε_{11} (exagéré à 20 %) et contracté transversalement de $\varepsilon_{22} = -\nu\,\varepsilon_{11}$. Le curseur fait varier ν ; le titre donne la variation relative de volume $\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} = (1-2\nu)\,\varepsilon_{11}$.

1.4.5.3 Relations entre les coefficients

On retiendra les relations suivantes entre les couples (λ, μ) et (E, ν) :

TABLE 1 : Relations entre coefficients d'élasticité isotrope.

	en fonction de (λ, μ)	en fonction de (E, ν)
E	$\dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	—
ν	$\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	—
λ	—	$\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
$\mu = G$	—	$\dfrac{E}{2(1+\nu)}$
K	$\lambda + \dfrac{2}{3}\mu$	$\dfrac{E}{3(1-2\nu)}$

D'après le Table 1, quand $\nu \to 1/2$, λ et K divergent (matériau **incompressible**), alors que μ reste fini.

1.5 Exercice : compression œdométrique

Énoncé

Un échantillon cylindrique de rayon R et de hauteur h, constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope (λ, μ), est placé dans un moule rigide. Il repose sur un fond fixe ($z = 0$), est comprimé sur sa face supérieure ($z = h$) par une pression uniforme p, et sa face latérale ($r = R$) glisse sans frottement contre la paroi du moule, qui empêche tout déplacement radial. On néglige les forces de volume.

1. Écrire les équations du problème et les conditions aux limites.
2. On cherche une solution sous la forme $\underline{u} = u(z)\,\underline{e}_z$.
3. Calculer $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$; en déduire l'équation vérifiée par u.
4. Déterminer complètement $\underline{u}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$.
5. Calculer la pression q exercée par la paroi du moule sur l'échantillon.
6. Exprimer K en fonction de E et ν. Que se passe-t-il pour un matériau quasi incompressible ? En déduire comment mesurer K.

Correction

1. Équations du problème :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\ \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla u}} + {}^t\underline{\underline{\nabla u}}\right) \end{cases}$$

Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} &\underline{u}(r,\theta,0) = \underline{0} && && \text{sur } \partial\Omega_{\text{inf}}, \\ &\underline{T}(r,\theta,h) = -p\,\underline{e}_z && && \text{sur } \partial\Omega_{\text{sup}}, \\ &\underline{u}(R,\theta,z)\cdot\underline{e}_r = 0, && \underline{T}(R,\theta,z)\cdot\underline{e}_\theta = 0, && \underline{T}(R,\theta,z)\cdot\underline{e}_z = 0 && \text{sur } \partial\Omega_{\text{lat}}. \end{aligned}$$

2. $\underline{u} = u(z)\,\underline{e}_z$.

3.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla u}} + {}^t\underline{\underline{\nabla u}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{z,z} \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{\sigma}} = u_{z,z} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \Rightarrow u_{z,zz} = 0$.

4. Donc $u_z = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. $u(z = 0) = 0 \Rightarrow b = 0$, d'où $u_z = az$ et

$$\underline{\underline{\sigma}} = a \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}.$$

Sur $\partial\Omega_{\text{sup}}$, $\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{e}_z = -p\,\underline{e}_z \Rightarrow a(\lambda + 2\mu) = -p \Rightarrow a = -\dfrac{p}{\lambda + 2\mu}$. Soit

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda p}{\lambda + 2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\lambda p}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \qquad \boxed{\underline{u} = -\frac{p}{\lambda + 2\mu}\, z\,\underline{e}_z.}$$

5. $\underline{\underline{\sigma}}(R,\theta,z)\,\underline{e}_r = -\dfrac{\lambda p}{\lambda+2\mu}\,\underline{e}_r = -q\,\underline{e}_r$ (définition de q comme une pression), d'où

$$q = \frac{\lambda\, p}{\lambda+2\mu}.$$

6. Avec $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2}{3}\,\frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3E\nu + E(1-2\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E(1+\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Donc $K \to \infty \iff \nu \to 1/2$. Dans ce cas (matériau quasi incompressible), $\lambda \simeq K \gg \mu$ et

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{p}{\lambda+2\mu} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{p}{\lambda} \end{pmatrix}, \qquad -\frac{p}{\lambda} \simeq -\frac{p}{K} \ \text{ car } K = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu.$$

D'où $K \simeq -\dfrac{p}{\varepsilon_{zz}}$ avec $p = F/S$ et $\varepsilon_{zz} = \Delta h/h$ (le déplacement u est linéaire en z, de pente a, et vaut Δh en $z = h$). Soit

$$\boxed{K \simeq \frac{F}{S}\,\frac{h}{|\Delta h|}.}$$

1.6 Thermoélasticité

1.6.1 Déformation thermique

On considère un solide initialement à la température T_0, porté à la température $T = T_0 + \Delta T$:

- $\Delta T > 0$: **dilatation** thermique ;
- $\Delta T < 0$: **contraction** thermique.

Quand un solide est soumis à une variation de température ΔT, il se dilate ou se contracte suivant le signe de ΔT. Les déformations thermiques sont directement proportionnelles à ΔT, avec un coefficient de proportionnalité α (coefficient de dilatation thermique), ici supposé isotrope :

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}(\underline{M}) = \alpha\,\Delta T(\underline{M})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}.} \tag{15}$$

1.6.2 Partition des déformations

Si rien n'empêche cette dilatation, la variation de température n'entraîne aucune contrainte. Les déformations thermiques s'ajoutent aux déformations élastiques :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{total}}(\underline{M}) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{élas}}(\underline{M}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}(\underline{M}) = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{M}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}(\underline{M}) = \underbrace{\frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,\operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{élas}}} + \underbrace{\alpha\,\Delta T\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}}.$$

Seule la partie élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{e} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{total}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}$ génère des contraintes (si $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{tot}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}$, alors $\underline{\underline{\varepsilon}}^{e} = \underline{\underline{0}}$ et $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$).

1.6.3 Loi de comportement thermoélastique

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{e} + \lambda\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{e})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}\\ &= 2\mu\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{total}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}\right) + \lambda\,\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{total}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}}\right)\underline{\underline{\mathbf{1}}}\\ &= 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{tot}} + \lambda\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{tot}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underbrace{\left(2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}} + \lambda\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}\right)}_{2\mu\alpha\Delta T\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 3\lambda\alpha\Delta T\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} = \alpha\Delta T\,(2\mu+3\lambda)\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}}\end{aligned}$$

Avec $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, on a $\alpha\Delta T\,(2\mu + 3\lambda) = 3\alpha\,\Delta T\,K$, d'où

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{tot}} + \lambda\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{tot}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} - 3K\alpha\,\Delta T\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}.} \tag{16}$$

1.6.4 Exercice : cylindre bridé chauffé

Énoncé

Un cylindre d'axe $\underline{e}_z$, de rayon R et de longueur L, en matériau thermoélastique isotrope (E, ν, α), est placé entre deux appuis rigides plans sans frottement en $z = 0$ et $z = L$. Sa surface latérale est libre. On le soumet à une variation de température uniforme ΔT.

1. Écrire les conditions aux limites.
2. Montrer qu'un champ de contrainte de la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ est admissible.
3. Calculer le tenseur des déformations.

Correction

1. Sur $\partial\Omega_{z=0}$:

$$\underline{u}(r,\theta,0)\cdot\underline{e}_z = 0, \qquad \underline{T}\cdot\underline{e}_\theta = 0, \quad \underline{T}\cdot\underline{e}_r = 0 \qquad (\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,0)\,(-\underline{e}_z)).$$

Sur $\partial\Omega_{z=L}$:

$$\underline{u}(r,\theta,L)\cdot\underline{e}_z = 0, \qquad \underline{T}\cdot\underline{e}_\theta = 0, \quad \underline{T}\cdot\underline{e}_r = 0 \qquad (\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,L)\,\underline{e}_z).$$

Sur $\partial\Omega_{\text{lat}}$: $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(R,\theta,z)\,\underline{e}_r = \underline{0}$.
2. Avec $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ (et σ_{zz} uniforme), on a bien $\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$; cette forme de champ de contrainte est donc admissible car elle permet également de vérifier les conditions aux limites (vecteur contrainte nul sur la surface latérale, purement axial sur les faces d'appui).
3.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{e} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{th}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \alpha\,\Delta T\,\underline{\underline{\mathbf{1}}},$$

d'où

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\nu}{E}\,\sigma_{zz} + \alpha\Delta T & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{\nu}{E}\,\sigma_{zz} + \alpha\Delta T & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha\Delta T \end{pmatrix}.$$

2 Séance 2 — Critères de limite élastique et techniques de résolution analytique

Notes manuscrites de la séance : elasticite_2026_11_06.pdf (pages 23 et suivantes).

2.1 Contrainte équivalente et surface seuil

La loi de comportement élastique linéaire n'est valable que dans un certain domaine : au-delà, le matériau sort de la zone linéaire (plasticité, endommagement, rupture…). On cherche donc un **critère de limite élastique** C que l'on puisse confronter à l'état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} \longleftrightarrow C.$$

Or $\underline{\underline{\sigma}}$ est un tenseur d'ordre 2 : il n'existe pas de relation d'ordre naturelle entre deux tenseurs, et l'on ne peut pas dire directement qu'un état de contrainte est « plus grand » qu'un autre. Pour disposer d'une relation d'ordre entre un critère de sortie de la zone linéaire et un état de contrainte donné, on introduit un **scalaire** mesurant cet état : la **contrainte équivalente** σ_{eq}.

! Définition : contrainte équivalente et surface seuil

La **contrainte équivalente** $\sigma_{\text{eq}}(\underline{\underline{\sigma}})$ est un scalaire positif construit à partir de $\underline{\underline{\sigma}}$. On reste dans le domaine élastique tant que

$$\sigma_{\text{eq}}(\underline{\underline{\sigma}}) < \sigma_y,$$

où σ_y est la **limite d'élasticité** du matériau (mesurée en traction simple). L'ensemble des états de contrainte tels que $\sigma_{\text{eq}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_y$ forme la **surface seuil**.

Il faut **choisir** une contrainte équivalente ; ce choix dépend du matériau. On note $\sigma_{\text{I}} \geq \sigma_{\text{II}} \geq \sigma_{\text{III}}$ les contraintes principales (valeurs propres de $\underline{\underline{\sigma}}$). Les trois choix classiques sont :

— **Rankine** (contrainte principale maximale) :

$$\sigma_{\text{eq}}^{R} = \max\left(\sigma_{\text{I}}, \sigma_{\text{II}}, \sigma_{\text{III}}\right);$$

— **Tresca** (cisaillement maximal) :

$$\sigma_{\text{eq}}^{T} = \sup_{i,j} \left|\sigma_i - \sigma_j\right|;$$

— **von Mises** :

$$\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}}\right)^2 + \left(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}}\right)^2 + \left(\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}}\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\underline{\underline{\sigma}}^{D} : \underline{\underline{\sigma}}^{D}}, \tag{17}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^{D} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\,\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}$ est le **déviateur** des contraintes.

Ces trois contraintes équivalentes valent toutes $|\sigma_{11}|$ en traction simple $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11}\,\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$ (pour Rankine, en traction $\sigma_{11} > 0$) : c'est ce qui permet de les comparer à la même limite σ_y.

i Sens physique de la contrainte de von Mises

σ_{VM} ne dépend que du **déviateur** $\underline{\underline{\sigma}}^{D}$: elle est insensible à la partie sphérique $\frac{1}{3}\,\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}$, c'est-à-dire à une pression hydrostatique. On retrouve la décomposition sphérique / déviatorique de la séance précédente : la partie sphérique pilote la variation de volume (module K), la partie déviatorique la distorsion de forme (module μ). Comme $\underline{\underline{\sigma}}^{D} = 2\mu\,\underline{\underline{e}}$, l'énergie élastique de distorsion vaut

$$w_{\text{dist}} = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\sigma}}^{D} : \underline{\underline{e}} = \frac{1}{4\mu}\,\underline{\underline{\sigma}}^{D} : \underline{\underline{\sigma}}^{D} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma_{\text{VM}}^2 = 6\mu\, w_{\text{dist}}.$$

Le critère de von Mises limite donc l'**énergie de distorsion** stockée dans le matériau : un métal ne plastifie pas sous pression hydrostatique pure, mais par glissement (cisaillement) de ses plans cristallins.

Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}}, \sigma_{\mathrm{III}})$, la surface seuil de von Mises est un cylindre d'axe la trisectrice $\sigma_{\mathrm{I}} = \sigma_{\mathrm{II}} = \sigma_{\mathrm{III}}$ (axe hydrostatique), celle de Tresca un prisme à base hexagonale de même axe. En **contraintes planes** ($\sigma_{\mathrm{III}} = 0$), on coupe ces surfaces par le plan $(\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}})$: on obtient la représentation classique de la Figure 7, avec un **carré** pour Rankine, un **hexagone** pour Tresca et une **ellipse** pour von Mises,

$$\sigma_{\mathrm{VM}}^2 = \sigma_{\mathrm{I}}^2 - \sigma_{\mathrm{I}}\,\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{II}}^2 = \sigma_y^2.$$

(Dans cette figure, on n'impose pas $\sigma_{\mathrm{I}} \geq \sigma_{\mathrm{II}}$, et le critère de Rankine est appliqué aussi en compression : $|\sigma_i| \leq \sigma_y$.)

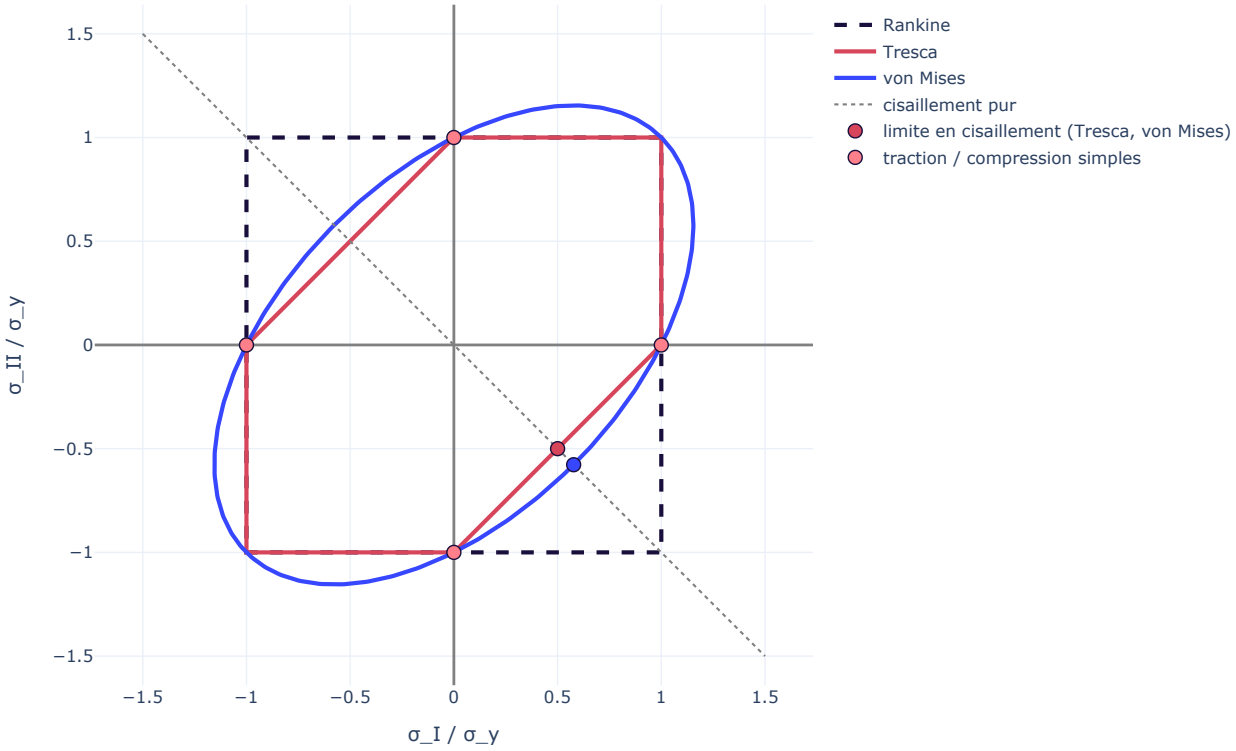

FIGURE 7 : Surfaces seuil en contraintes planes ($\sigma_{\mathrm{III}} = 0$) dans le plan des contraintes principales, pour une même limite d'élasticité σ_y : carré de Rankine, hexagone de Tresca, ellipse de von Mises. Les trois critères coïncident en traction et compression simples ; ils diffèrent le plus en cisaillement pur ($\sigma_{\mathrm{II}} = -\sigma_{\mathrm{I}}$, en pointillés), où Tresca donne $\tau = \sigma_y/2$ et von Mises $\tau = \sigma_y/\sqrt{3}$.

> **Remarque**
>
> À limite σ_y identique en traction, le critère de Tresca est plus sévère que celui de von Mises : en cisaillement pur, il prédit la plastification pour $\tau = \sigma_y/2$, contre $\tau = \sigma_y/\sqrt{3} \approx 0{,}577\,\sigma_y$ pour von Mises.

2.2 Techniques de résolution analytique

2.2.1 Rappel : le problème d'élasticité

On étudie des solides qui se déforment sous l'action de sollicitations extérieures, ces dernières induisant également des contraintes dans la structure.

Hypothèses

- petites perturbations (HPP) ;
- élasticité linéaire isotrope ;
- évolution quasi-statique ;
- évolution isotherme.

Dans ce cas, l'équilibre est donné par

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \qquad \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_v = \underline{0}.$$

2.2.1.1 Bilan des équations

Équations du problème d'élasticité linéaire

- **Équilibre** : $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_v = \underline{0}$ dans Ω, avec $\underline{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\underline{\sigma}}$.
- **Comportement** (loi de Hooke) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\, \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{\mathbf{1}}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\, \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\, \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{\mathbf{1}}}.$$

- **Compatibilité** : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla u}} + {}^t\underline{\underline{\nabla u}}\right)$.
- **Conditions aux limites** :

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega_u, \quad \underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}_d, \qquad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_f, \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})\, \underline{n} = \underline{f}_s.$$

2.2.2 Admissibilité et unicité

Définition : champs admissibles

- Un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est dit **statiquement admissible** (SA) si et seulement s'il vérifie les équations d'équilibre et les conditions aux limites en effort.
- De même, un champ de déplacement $\underline{u}$ est dit **cinématiquement admissible** (CA) si et seulement s'il vérifie les conditions aux limites en déplacement. La déformation doit alors être compatible : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\text{sym}}\, \underline{u}$.

Unicité. Si l'on trouve un champ de contrainte SA associé (par la loi de comportement) à un champ de déplacement CA, il s'agit d'**une** solution du problème. Le champ de contrainte solution est unique, mais le déplacement ne l'est pas forcément : il peut être défini à un déplacement de solide rigide près lorsque les conditions aux limites en déplacement ne suffisent pas à bloquer ces mouvements (cf. la section énergétique du cours).

2.2.3 Théorème de superposition

Du fait de la linéarité des problèmes traités :

! Théorème de superposition

Si un corps Ω, soumis à des déplacements imposés $\underline{u}_d^{(1)}$, des efforts volumiques $\underline{f}_v^{(1)}$ et surfaciques $\underline{f}_s^{(1)}$, admet pour solution un champ de déplacement $\underline{u}^{(1)}$, un champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)}$ et un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(1)}$, et que ce même solide, soumis à $\underline{u}_d^{(2)}$, $\underline{f}_v^{(2)}$ et $\underline{f}_s^{(2)}$, admet pour solution $\underline{u}^{(2)}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{(2)}$, alors, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, ce corps soumis à

$$\lambda_1 \underline{u}_d^{(1)} + \lambda_2 \underline{u}_d^{(2)}, \qquad \lambda_1 \underline{f}_s^{(1)} + \lambda_2 \underline{f}_s^{(2)}, \qquad \lambda_1 \underline{f}_v^{(1)} + \lambda_2 \underline{f}_v^{(2)}$$

admet pour solution

$$\lambda_1 \underline{u}^{(1)} + \lambda_2 \underline{u}^{(2)}, \qquad \lambda_1 \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)}, \qquad \lambda_1 \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\underline{\sigma}}^{(2)}.$$

2.2.4 Approche en déplacement

On résume ici la méthode à suivre pour résoudre un problème de mécanique de milieux continu en élasticité linéaire dans le cas où il serait plus simple d'intuiter une forme plausible de déplacement.

! Méthode - approche en déplacement

1. Postuler un champ de déplacement $\underline{u}$ (en s'aidant des symétries du problème).
2. Calculer le champ de déformation linéarisée $\underline{\underline{\varepsilon}}$ correspondant.
3. Utiliser la loi de comportement pour calculer le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$.
4. L'injecter dans les équations d'équilibre et résoudre l'équation différentielle obtenue.
5. Utiliser les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration.

2.2.5 Équation de Navier

Les équations de compatibilité, d'équilibre et la loi de Hooke, dans le cas élastique linéaire isotrope,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_v = \underline{0} & (1) \\ \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\, \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{\mathbf{1}}} & (2) \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla u}} + {}^t\underline{\underline{\nabla u}}\right) & (3) \end{cases}$$

peuvent être combinées en une unique équation portant sur le déplacement, l'**équation de Navier** :

! Équation de Navier

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \qquad (\lambda + \mu)\, \underline{\nabla}\, (\operatorname{div} \underline{u}) + \mu\, \Delta \underline{u} + \underline{f}_v = \underline{0}. \tag{18}$$

i Démonstration (en notation d'Einstein)

Profitons de cette démonstration pour nous exercer à la notation d'Einstein (sommation sur les indices répétés, la virgule désignant la dérivation : $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$).
(2) par linéarité de la divergence,

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \operatorname{div}\left(2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\, \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{\mathbf{1}}}\right) = 2\mu\, \operatorname{div} \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\, \operatorname{div}\left(\operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{\mathbf{1}}}\right).$$

Lemme. Soient f un champ scalaire et $\underline{\underline{T}}$ un champ de tenseurs d'ordre 2 :

$$\operatorname{div}\left(f\,\underline{\underline{T}}\right) = \left(f\,T_{ij}\right)_{,j} = \underbrace{f_{,j}\,T_{ij}}_{\underline{\underline{T}}\,\underline{\nabla} f} + \underbrace{f\,T_{ij,j}}_{f\,\operatorname{div}\underline{\underline{T}}}.$$

D'où

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}\right) = \underline{\underline{\mathbf{1}}}\,\underline{\nabla}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = \underline{\nabla}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\right), \qquad \text{soit} \qquad \operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\operatorname{div}\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\,\underline{\nabla}\left(\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}\right).$$

(3)

- $\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(u_{i,i} + u_{j,j}\right) = u_{i,i} = \operatorname{div}\underline{u}$;
- $\left(\operatorname{div}\underline{\underline{\varepsilon}}\right)_i = \varepsilon_{ij,j} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)_{,j} = \frac{1}{2}\left(u_{i,jj} + u_{j,ij}\right)$, or
  - $u_{i,jj} = \left(\Delta\underline{u}\right)_i$,
  - $u_{j,ij} = u_{j,ji} = \left(u_{j,j}\right)_{,i} = \left(\underline{\nabla}\left(\operatorname{div}\underline{u}\right)\right)_i$.

Soit

$$\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\left[\frac{1}{2}\left(\Delta\underline{u} + \underline{\nabla}\left(\operatorname{div}\underline{u}\right)\right)\right] + \lambda\,\underline{\nabla}\left(\operatorname{div}\underline{u}\right). \qquad (4)$$

Finalement, (1) et (4) donnent

$$2\mu\left[\frac{1}{2}\left(\Delta\underline{u} + \underline{\nabla}\left(\operatorname{div}\underline{u}\right)\right)\right] + \lambda\,\underline{\nabla}\left(\operatorname{div}\underline{u}\right) + \underline{f}_v = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mu\,\Delta\underline{u} + (\lambda+\mu)\,\underline{\nabla}\left(\operatorname{div}\underline{u}\right) + \underline{f}_v = \underline{0}.}$$

2.3 TD 1 — Torsion d'un barreau cylindrique

Énoncé

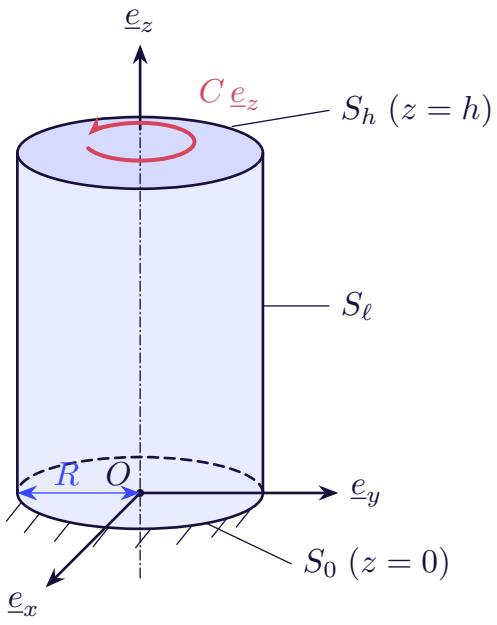

FIGURE 8 : Barreau cylindrique encastré en $z = 0$ et soumis à un couple $C\,\underline{e}_z$ sur sa face supérieure.

Un barreau cylindrique d'axe $(O, \underline{e}_z)$, de rayon R et de hauteur h, est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope (coefficients de Lamé λ, μ). Sa base S_0 $(z = 0)$ est encastrée, sa

surface latérale S_ℓ est libre d'effort, et sa face supérieure S_h ($z = h$) est soumise à des efforts de résultante nulle et de moment $C\,\underline{e}_z$ en O (Figure 8). On néglige les efforts volumiques.

1. Écrire les conditions aux limites.
2. On suppose que chaque section droite tourne en bloc d'un petit angle $\varphi(z)$ autour de $\underline{e}_z$. Montrer que $\underline{u} = r\,\varphi(z)\,\underline{e}_\theta$.
3. *(Question supprimée pour utiliser l'approche en déplacement sans Navier)*
4. Calculer le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$.
5. Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et vérifier la condition aux limites sur S_ℓ.
6. Injecter $\underline{\underline{\sigma}}$ dans l'équation d'équilibre et en déduire $\varphi(z)$, en tenant compte de la condition aux limites sur S_0.
7. Exploiter les conditions aux limites sur S_h pour relier la constante obtenue au couple C.
8. Diagonaliser le tenseur des contraintes.
9. Calculer la contrainte de von Mises et en déduire le couple maximal admissible pour une limite d'élasticité σ_y.

Correction

1. Sur S_ℓ : $\underline{\underline{\sigma}}(R,\theta,z)\,\underline{e}_r = \underline{0}$. Sur S_0 : $\underline{u}(r,\theta,0) = \underline{0}$.
Sur S_h, on ne connaît que le torseur des efforts (résultante et moment) :

$$\underline{R} = \iint_{S_h} \underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,h)\,\underline{e}_z\,\mathrm{d}S = \underline{0}, \qquad \iint_{S_h} \underline{OM} \wedge \left(\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,h)\,\underline{e}_z\right)\mathrm{d}S = C\,\underline{e}_z.$$

2. Un point $M(r,\theta,z)$ se déplace, après une rotation φ, en $M'(r,\theta+\varphi(z),z)$, d'où

$$\underline{u} = \underline{OM'} - \underline{OM} = r\,\underline{e}_r(\theta+\varphi) - r\,\underline{e}_r(\theta).$$

Avec $\underline{e}_r(\theta) = \cos\theta\,\underline{e}_x + \sin\theta\,\underline{e}_y$ et $\underline{e}_\theta(\theta) = \cos\theta\,\underline{e}_y - \sin\theta\,\underline{e}_x$:

$$\underline{e}_r(\theta+\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)\,\underline{e}_x + (\sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta)\,\underline{e}_y,$$

d'où

$$\underline{u} = r\Big[\underbrace{(\cos\varphi - 1)}_{\simeq 0}\,\underline{e}_r(\theta) + \underbrace{\sin\varphi}_{\simeq\varphi}\,\underline{e}_\theta(\theta)\Big] \simeq r\,\varphi\,\underline{e}_\theta, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{u} = \varphi(z)\,r\,\underline{e}_\theta.}$$

4. Avec le gradient en cylindriques ($u_\theta = r\varphi(z)$, $u_r = u_z = 0$) :

$$\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 0 & r\varphi' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}r\varphi' \\ 0 & \frac{1}{2}r\varphi' & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_z)}.$$

5. $\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}} = 0$, donc

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\,\operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu r\varphi' \\ 0 & \mu r\varphi' & 0 \end{pmatrix}.$$

On note que $\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{e}_r = \underline{0}$ sur S_ℓ : la condition aux limites sur S_ℓ est vérifiée.
6. L'équilibre $\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ donne

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mu r\varphi'' \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad\Longrightarrow\quad \varphi'' = 0.$$

Soit $\varphi' = \alpha$, d'où $\boxed{\varphi(z) = \alpha z + \beta}$.

Détermination des constantes d'intégration à l'aide des CL. Or $\underline{u}(z=0)=\underline{0}$, d'où $\beta=0$. On a donc :

$$\underline{u}=r\,\alpha\,z\,\underline{e}_\theta,\qquad \underline{\underline{\varepsilon}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}r\alpha\\0&\frac{1}{2}r\alpha&0\end{pmatrix},\qquad \underline{\underline{\sigma}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\mu r\alpha\\0&\mu r\alpha&0\end{pmatrix}.$$

7. Sur S_h, le vecteur contrainte vaut $\underline{T}=\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,h)\,\underline{e}_z=\mu r\alpha\,\underline{e}_\theta$. Sa résultante est

$$\underline{R}=\iint_{S_h}\mu r\alpha\,\underline{e}_\theta\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r=\mu\alpha\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\underline{e}_\theta\,\mathrm{d}\theta=\underline{0},$$

et son moment en O

$$\underline{\mathcal{M}}=\iint_{S_h}\underline{OM}\wedge\underline{T}\,\mathrm{d}S=\iint r\,\underline{e}_r\wedge\mu\alpha r\,\underline{e}_\theta\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r=\mu\alpha\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\underline{e}_z=\mu\alpha\,\frac{\pi R^4}{2}\,\underline{e}_z$$

(la composante $h\,\underline{e}_z\wedge\underline{T}$ de $\underline{OM}=r\,\underline{e}_r+h\,\underline{e}_z$ s'intègre à zéro, comme $\underline{R}$). Or $\underline{\mathcal{M}}=C\,\underline{e}_z$, d'où

$$\boxed{\alpha=\frac{2C}{\mu\pi R^4}.}$$

8. Diagonalisation du tenseur des contraintes, en notant $\tau=\mu r\alpha$:

$$\det\left(\underline{\underline{\sigma}}-\lambda\underline{\underline{\mathbf{1}}}\right)=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0\\0&-\lambda&\tau\\0&\tau&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\left(\lambda^2-\tau^2\right)=0.$$

Les valeurs propres sont 0, τ et $-\tau$, que l'on ordonne :

$$\sigma_{\mathrm{I}}=\tau,\qquad \sigma_{\mathrm{II}}=0,\qquad \sigma_{\mathrm{III}}=-\tau.$$

Directions propres associées ($\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{v}=\lambda\,\underline{v}$) :

- σ_{II} : $\underline{v}_{\mathrm{II}}=\underline{e}_r$;
- σ_{I} : $\tau v_r=0$ et $\tau v_\theta=\tau v_z$, soit $v_r=0$, $v_\theta=v_z$; avec $\|\underline{v}\|=1$, $2A^2=1$, d'où $\underline{v}_{\mathrm{I}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underline{e}_\theta+\underline{e}_z\right)$;
- σ_{III} : $v_r=0$, $v_\theta=-v_z$, d'où $\underline{v}_{\mathrm{III}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\underline{e}_\theta+\underline{e}_z\right)$.

Les directions principales non triviales sont à 45° de l'axe : c'est pourquoi une craie (matériau fragile, rompant en traction) cassée en torsion présente une surface de rupture en hélice à 45°.

9. $\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}}=0$, donc $\underline{\underline{\sigma}}^D=\underline{\underline{\sigma}}$ et

$$\sigma_{\mathrm{VM}}=\sqrt{\frac{3}{2}\,\underline{\underline{\sigma}}^D:\underline{\underline{\sigma}}^D}=\sqrt{\frac{3}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\tau^2&0\\0&0&\tau^2\end{pmatrix}}=\sqrt{\frac{3}{2}\times 2\tau^2}=\sqrt{3}\,\tau.$$

$\tau=\mu\alpha r$ est maximal en $r=R$; on reste élastique partout si

$$\sqrt{3}\,\mu\alpha R\le\sigma_y\quad\Longleftrightarrow\quad\alpha\le\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}\,\mu R}.$$

Or $C=\dfrac{\pi\mu\alpha R^4}{2}$, d'où

$$\boxed{C_{\max}=\frac{\pi R^3\,\sigma_y}{2\sqrt{3}}.}$$

2.4 TD 1 — Dimensionnement d'un réservoir sous pression

Énoncé

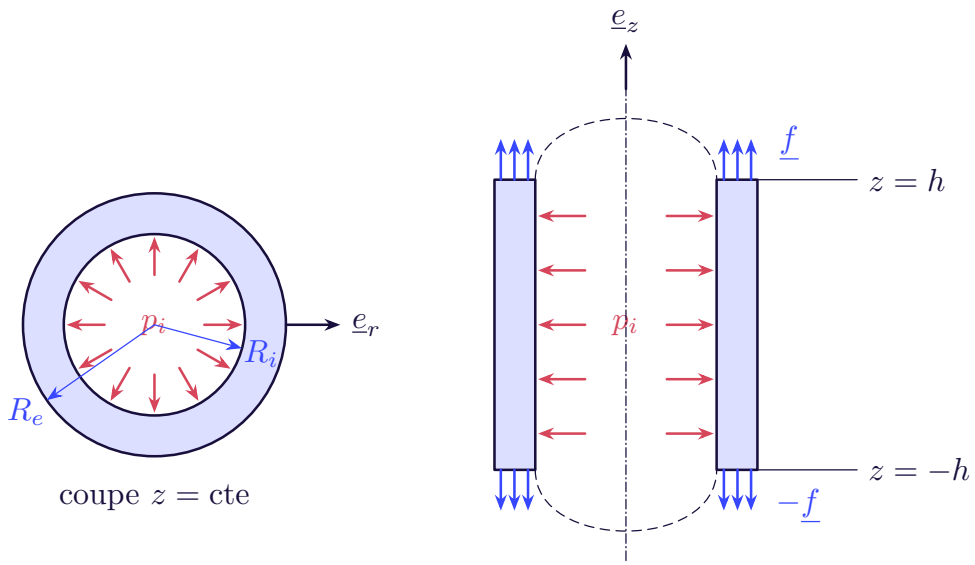

FIGURE 9 : Réservoir cylindrique : coupe transversale (à gauche) et coupe longitudinale (à droite). Les fonds (en tirets) ne font pas partie du domaine étudié ; ils transmettent au tube l'effort axial $\pm\underline{f}$.

Un réservoir est constitué d'un tube épais d'axe $\underline{e}_z$, de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e, occupant $-h \leq z \leq h$, fermé par deux fonds (Figure 9). Il contient un fluide à la pression p_i ; la pression extérieure est négligée. Le matériau est élastique linéaire isotrope (λ, μ) et on néglige les efforts volumiques. Les fonds transmettent au tube, sur ses sections extrêmes $z = \pm h$, une densité surfacique d'effort uniforme $\pm\underline{f}$.

1. Écrire les conditions aux limites sur le tube.
2. En isolant un fond du réservoir, déterminer $\underline{f}$.
3. Utiliser les symétries du problème pour simplifier la forme du champ de déplacement.
4. À l'aide de l'équation de Navier, déterminer le champ de déplacement.
5. Calculer le tenseur des déformations.
6. Calculer le tenseur des contraintes.
7. Déterminer les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites.

Correction

1.

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}(R_i, \theta, z)\,(-\underline{e}_r) = p_i\,\underline{e}_r, \\ \underline{\underline{\sigma}}(R_e, \theta, z)\,\underline{e}_r = \underline{0}, \\ \underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, h)\,\underline{e}_z = \underline{f}, \\ \underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, -h)\,(-\underline{e}_z) = -\underline{f}. \end{cases}$$

2. On isole le fond du réservoir : il est soumis à la pression p_i sur le disque de rayon R_i, et à l'action du tube sur la couronne $R_i \leq r \leq R_e$. Son équilibre donne

$$\int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_e} \underline{f}\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta - p_i\,\pi R_i^2\,\underline{e}_z = \underline{0} \quad\Longrightarrow\quad \underline{f}\,\frac{R_e^2-R_i^2}{2}\,2\pi = p_i\,\pi R_i^2\,\underline{e}_z \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\underline{f} = p_i\,\frac{R_i^2}{R_e^2-R_i^2}\,\underline{e}_z.}$$

Remarque : calcul de la résultante des forces de pression

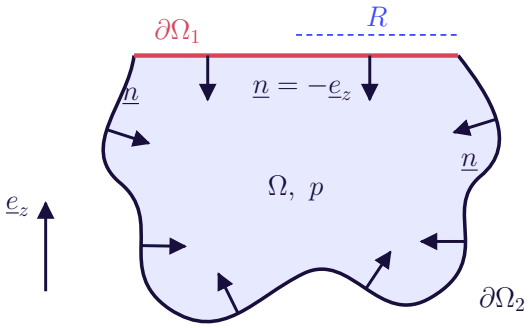

FIGURE 10 : Fluide à la pression uniforme p occupant le domaine Ω, délimité par la surface plane $\partial\Omega_1$ (disque de rayon R) et la surface $\partial\Omega_2$, de forme quelconque (fond du réservoir). La normale $\underline{n}$ est la normale sortante de la paroi : elle pointe vers le fluide, et $-p\,\underline{n}\,\mathrm{d}S$ est l'effort exercé par le fluide sur la paroi.

En statique, la résultante des forces d'une pression **uniforme** p sur une surface **fermée** est nulle. Pour la frontière $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ du domaine fluide, avec $\underline{n}$ orientée vers le fluide comme sur la Figure 10 :

$$\iint_{\partial\Omega} -p\,\underline{n}\,\mathrm{d}S = \underline{0} \qquad \Big(\text{car } \iint_{\partial\Omega} \underline{n}\,\mathrm{d}S = -\iiint_{\Omega} \underline{\nabla}(1)\,\mathrm{d}V = \underline{0}\Big).$$

On peut alors trivialiser le calcul de la résultante sur une surface compliquée (ici $\partial\Omega_2$, le fond bombé du réservoir) en remarquant que

$$\iint_{\partial\Omega_2} -p\,\underline{n}\,\mathrm{d}S = -\iint_{\partial\Omega_1} -p\,\underline{n}\,\mathrm{d}S,$$

où $\partial\Omega_1$ est la surface plane qui « ferme » $\partial\Omega_2$: le disque de rayon R, sur lequel $\underline{n} = -\underline{e}_z$. D'où

$$\iint_{\partial\Omega_1} -p\,\underline{n}\,\mathrm{d}S = \iint_{\partial\Omega_1} p\,\mathrm{d}S\,\underline{e}_z = p\,\pi R^2\,\underline{e}_z, \qquad \iint_{\partial\Omega_2} -p\,\underline{n}\,\mathrm{d}S = -p\,\pi R^2\,\underline{e}_z,$$

quelle que soit la forme du fond : c'est l'effort du fluide sur le fond, qui donne le terme $-p_i\,\pi R_i^2\,\underline{e}_z$ de l'équilibre ci-dessus.

3. Par symétrie de révolution, $u_\theta = 0$ et $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = 0$, d'où $\underline{u} = u_r(r,z)\,\underline{e}_r + u_z(r,z)\,\underline{e}_z$.

Attention : ici, ce n'est pas si simple

La symétrie seule ne suffit pas : on suppose en plus que $\underline{\underline{\varepsilon}}$ **est invariant par translation selon** z (loin des fonds, toutes les sections droites sont dans le même état), ce qui conduit à

$$\underline{u} = u_r(r)\,\underline{e}_r + u_z(z)\,\underline{e}_z.$$

4. En l'absence de forces de volume et en quasi-statique, l'équation de Navier s'écrit

$$(\lambda+\mu)\,\underline{\nabla}\,(\operatorname{div}\underline{u})+\mu\,\Delta\underline{u}=\underline{0}.$$

Ici,

$$\operatorname{div}\underline{u}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=u_r'(r)+\frac{u_r}{r}+u_z'(z),$$

$$\underline{\nabla}\,(\operatorname{div}\underline{u})=\frac{\partial}{\partial r}\left(u_r'+\frac{u_r}{r}+u_z'\right)\underline{e}_r+u_z''(z)\,\underline{e}_z=\left(u_r''+\frac{u_r'}{r}-\frac{u_r}{r^2}\right)\underline{e}_r+u_z''(z)\,\underline{e}_z,$$

$$\Delta\underline{u}=\left(u_r''+\frac{u_r'}{r}-\frac{u_r}{r^2}\right)\underline{e}_r+u_z''\,\underline{e}_z.$$

Soit, avec Navier,

$$(\lambda+2\mu)\begin{pmatrix}u_r''(r)+\dfrac{u_r'(r)}{r}-\dfrac{u_r(r)}{r^2}\\0\\u_z''(z)\end{pmatrix}=\underline{0}.$$

— Sur u_z : $u_z''(z)=0\Rightarrow u_z=Az+B$. La constante B est une simple translation selon l'axe : on peut prendre $B=0$.

— Sur u_r : $u_r''+\dfrac{u_r'}{r}-\dfrac{u_r}{r^2}=0\iff r^2u_r''+r\,u_r'-u_r=0$ (équation d'Euler). On cherche u_r sous la forme r^m :

$$r^2\,m(m-1)\,r^{m-2}+r\,m\,r^{m-1}-r^m=0\implies(m(m-1)+m-1)\,r^m=0\implies m^2-1=0\implies m=\pm1.$$

D'où $u_r=C\,r+\dfrac{D}{r}$, soit

$$\boxed{\underline{u}=\left(C\,r+\frac{D}{r}\right)\underline{e}_r+A\,z\,\underline{e}_z.}$$

5.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}=\begin{pmatrix}u_{r,r}&0&0\\0&\dfrac{u_r}{r}&0\\0&0&u_{z,z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C-\dfrac{D}{r^2}&0&0\\0&C+\dfrac{D}{r^2}&0\\0&0&A\end{pmatrix}.$$

6. $\underline{\underline{\sigma}}=2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}+\lambda\,\operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}$ avec $\operatorname{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}=2C+A$:

$$\underline{\underline{\sigma}}=\begin{pmatrix}2\mu\left(C-\dfrac{D}{r^2}\right)+\lambda(2C+A)&0&0\\0&2\mu\left(C+\dfrac{D}{r^2}\right)+\lambda(2C+A)&0\\0&0&2\mu A+\lambda(2C+A)\end{pmatrix}.$$

7. Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases}2\mu\left(C-\dfrac{D}{R_i^2}\right)+\lambda(2C+A)=-p_i & (1)\\[2mm] 2\mu\left(C-\dfrac{D}{R_e^2}\right)+\lambda(2C+A)=0 & (2)\\[2mm] 2\mu A+\lambda(2C+A)=p_i\,\dfrac{R_i^2}{R_e^2-R_i^2} & (3)\end{cases}$$

— $(1)-(2)$: $2\mu D\left(\dfrac{1}{R_e^2}-\dfrac{1}{R_i^2}\right)=-p_i$;

— $R_i^2 \times (1) - R_e^2 \times (2) : 2\mu C\left(R_i^2 - R_e^2\right) + \lambda(2C + A)\left(R_i^2 - R_e^2\right) = -p_i R_i^2$;
— $R_i^2 \times (1) - R_e^2 \times (2) - \left(R_i^2 - R_e^2\right) \times (3) : 2\mu\left(C - A\right)\left(R_i^2 - R_e^2\right) = 0.$

D'où

$$\begin{cases} C = A, \\ (2\mu + 3\lambda)\, C = p_i \dfrac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}, \\ 2\mu D = p_i \dfrac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}, \end{cases}$$

et finalement

$$\boxed{\sigma_{rr} = \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 - \frac{R_e^2}{r^2}\right), \qquad \sigma_{\theta\theta} = \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 + \frac{R_e^2}{r^2}\right), \qquad \sigma_{zz} = \frac{p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}.}$$

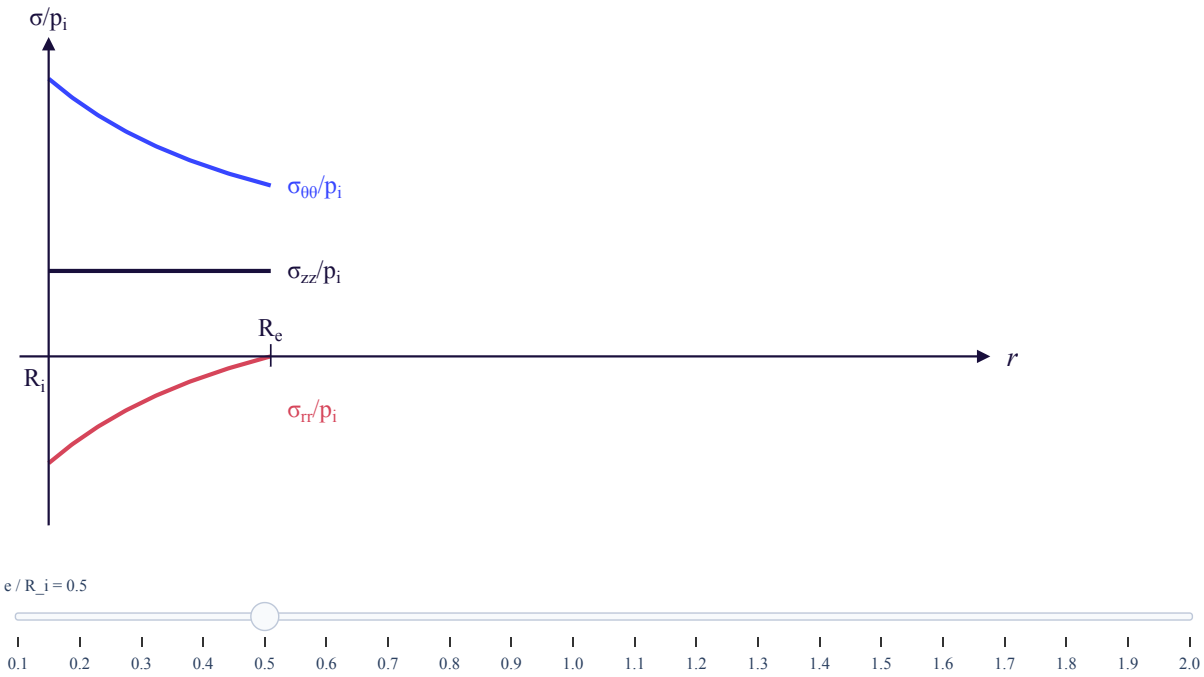

FIGURE 11 : Réservoir sous pression : contraintes dans l'épaisseur du tube, rapportées à la pression p_i. Le curseur fait varier l'épaisseur $e = R_e - R_i$ (rapportée à R_i ; version PDF : $e = R_i/2$). La contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ (traction) est la plus grande et maximale en paroi intérieure, où $\sigma_{rr} = -p_i$; σ_{rr} s'annule en paroi extérieure et σ_{zz} est uniforme.

3 Séance 3

Rédaction à venir.

4 Séance 4 — Méthodes énergétiques : travaux virtuels et énergie potentielle

Notes manuscrites de la séance : elasticite_2026_11_20.pdf (pages 56 et suivantes).

4.1 Résolution par la minimisation de l'énergie potentielle

Objectif

En général, lorsque le problème que l'on souhaite résoudre porte sur une géométrie et/ou un chargement complexe, il n'est plus possible de déterminer de solution exacte à notre problème. Il est alors possible de déterminer des **solutions approchées** : c'est le sujet de ce chapitre.

On rappelle le problème d'élastostatique étudié dans le cadre de ce cours (voir Section 2.2.1.1) :

- **Équilibre** : $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_v = \underline{0}$ dans Ω, avec $\underline{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\underline{\sigma}}$,
- **Compatibilité** : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla u}} + {}^t\underline{\underline{\nabla u}}\right)$,
- **Conditions aux limites** : $\underline{u} = \underline{u}_d$ sur $\partial\Omega_u$ et $\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \underline{f}_s$ sur $\partial\Omega_f$.

L'objectif de ce chapitre est de montrer que ce problème est **équivalent à la minimisation d'une énergie**. Il ne s'agit pas là d'introduire une nouvelle physique, mais une **reformulation** du problème, sous forme faible puis sous forme de minimisation.

La résolution de ce problème de minimisation mène à la **solution exacte** si celle-ci appartient à l'espace sur lequel on effectue la minimisation. En se plaçant dans un sous-espace ne contenant pas la solution, on peut alors tout de même trouver une **approximation**, en cherchant l'élément de ce sous-espace minimisant l'énergie du problème, lorsqu'une telle énergie existe.

Attention : forces non conservatives

Dans le cadre de forces non conservatives par exemple, où la force ne dérive pas d'un potentiel, l'énergie mécanique n'est plus conservée et la solution ne minimise plus l'énergie potentielle du système. C'est le cas du **frottement**, mais aussi des **forces suiveuses** (par exemple une pression qui reste normale à une surface qui tourne).
Sans potentiel, le principe des travaux virtuels (Section 4.1.1) reste valable (c'est lui qu'utilisent les éléments finis), mais il n'est plus la stationnarité d'aucune quantité : la matrice de rigidité n'est alors plus symétrique.

4.1.1 Principe des travaux virtuels (PTV)

4.1.1.1 Espaces d'admissibilité

On précise ici les définitions de la Section 2.2.2.

Définition : champs admissibles

- **Statiquement admissible (SA).** Un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^\star$ est dit SA si et seulement si
$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^\star + \underline{f}_v = \underline{0} \quad \text{dans } \Omega, \qquad \underline{\underline{\sigma}}^\star = {}^t\underline{\underline{\sigma}}^\star, \\ \underline{\underline{\sigma}}^\star\,\underline{n} = \underline{f}_s \quad \text{sur } \partial\Omega_f. \end{cases}$$
- **Cinématiquement admissible (CA).** Un champ de déplacement $\underline{u}^\star \in H^1(\Omega)^3$ est dit CA si et seulement si
$$\underline{u}^\star = \underline{u}_d \quad \text{sur } \partial\Omega_u.$$
- **Cinématiquement admissible à zéro (CA0).** Un champ de déplacement $\underline{u}^0 \in H^1(\Omega)^3$ est dit CA0 si et seulement si
$$\underline{u}^0 = \underline{0} \quad \text{sur } \partial\Omega_u.$$

i Remarque : CA0 = variations admissibles

Si l'on part d'un champ $\underline{u} \in \mathrm{CA}$ que l'on perturbe pour obtenir un autre champ $\underline{u}^\star \in \mathrm{CA}$, la **variation** $\underline{u}^0 = \underline{u}^\star - \underline{u}$ vérifie $\underline{u}^0 = \underline{u}_d - \underline{u}_d = \underline{0}$ sur $\partial\Omega_u$, donc $\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0$.
Un champ $\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0$ représente donc une **variation admissible** du déplacement autour d'un champ $\underline{u} \in \mathrm{CA}$:

$$\forall h \in \mathbb{R}, \qquad \underline{u} + h\,\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}.$$

4.1.1.2 Énoncé du PTV

! Principe des travaux virtuels

Un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^\star$ (symétrique) est SA si et seulement si le travail de $\underline{\underline{\sigma}}^\star$ dans la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)$ associée à **toute** variation virtuelle $\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0$ est égal au travail des efforts extérieurs donnés dans ce même champ $\underline{u}^0$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^\star \in \mathrm{SA} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^\star : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\,\mathrm{d}V = W_{\mathrm{ext}}(\underline{u}^0), \qquad \forall\, \underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0, \tag{19}$$

où

$$W_{\mathrm{ext}}(\underline{u}^0) := \int_\Omega \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega_f} \underline{f}_s \cdot \underline{u}^0\,\mathrm{d}S.$$

i Remarques

— Puisqu'on s'intéresse au travail de variations $\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0$ (donc nulles sur $\partial\Omega_u$), le travail des efforts de réaction (inconnus) est nul : ces efforts n'apparaissent pas dans W_{ext}, seuls les efforts **connus** y apparaissent.

— Le principe des puissances virtuelles vu en MMC s'écrit avec des champs de vitesses virtuelles **quelconques** (l'énoncé étant linéaire par rapport au champ virtuel, vitesses et déplacements virtuels sont interchangeables). Le cours de MMC donne donc une version plus générale du PTV, où le champ virtuel $\hat{\underline{v}}$ est **quelconque**, sans condition sur $\partial\Omega_u$. Le travail des efforts extérieurs doit alors inclure celui des réactions exercées sur $\partial\Omega_u$, **inconnues**, de densité surfacique $\underline{R}$:

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\hat{\underline{v}})\,\mathrm{d}V = \int_\Omega \underline{f}_v \cdot \hat{\underline{v}}\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega_f} \underline{f}_s \cdot \hat{\underline{v}}\,\mathrm{d}S + \int_{\partial\Omega_u} \underline{R} \cdot \hat{\underline{v}}\,\mathrm{d}S, \qquad \forall\, \hat{\underline{v}} \in H^1(\Omega)^3.$$

La démonstration du PTV (Section 4.1.1.3) donne alors $\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_v = \underline{0}$ dans Ω, $\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \underline{f}_s$ sur $\partial\Omega_f$ et $\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \underline{R}$ sur $\partial\Omega_u$: la relation $\underline{R} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}$ est une **conséquence** du PTV général. Réciproquement, si l'on prend $\underline{R} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}$ pour acquis, se restreindre à $\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0$ ne fait perdre aucune information. Le terme en $\underline{R}$ disparaît, on résout le problème sans connaître les réactions, puis on les calcule **a posteriori** par $\underline{R} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}$.
Faire travailler tous les efforts, y compris ceux de réaction ou d'interface (le PTV général), devient indispensable lorsque la condition locale n'est plus aussi intuitive que $\underline{R} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}$, par exemple pour une **interface dotée de sa propre énergie** (tension de surface, front de changement de phase, interface cohésive), où c'est le PTV qui fournit la condition de saut à l'interface.

— Les équations locales d'équilibre sont remplacées par une **formulation intégrale** (formulation variationnelle, ou **forme faible**). Plutôt que de vérifier l'équilibre en tout point, on impose la nullité du travail virtuel total pour toute variation virtuelle $\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0$ de déplacement.

— Le PTV ne fait intervenir **aucune loi de comportement** : l'équivalence « $\underline{\underline{\sigma}}^\star$ SA $\iff$ PTV » est de la pure statique, valable pour tout matériau, élastique ou non. Le comportement n'intervient que dans l'énergie potentielle W (Section 4.1.3), à travers $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$.

— Quand une énergie potentielle W existe, l'équilibre s'écrit comme la **stationnarité** de W dans toutes les directions admissibles $\underline{u}^0$:

$$DW(\underline{u})(\underline{u}^0) = 0, \qquad \forall\, \underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0,$$

où $DW(\underline{u})(\underline{u}^0)$ est la dérivée de Gâteaux de W dans la direction $\underline{u}^0$ (Section 4.1.3.2) : **c'est le PTV !** Avec de plus $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ défini positif, cette stationnarité est un **minimum** (cf. Section 4.1.3). Le PTV reste toutefois valable qu'une telle énergie existe ou non.

Analogie avec le ressort

On considère un ressort de raideur k, fixé à un mur et soumis à une force F à son extrémité, de déplacement u. Son énergie potentielle est

$$E_p = \underbrace{\frac{1}{2}\, k\, u^2}_{\text{énergie élastique}} - \underbrace{F\, u}_{W_F}.$$

u est une position d'équilibre $\iff$ u stationnarise E_p $\iff \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}u} = 0 \iff k\,u - F = 0.$
Autrement dit, la variation d'énergie pour une petite variation δu est nulle à l'ordre 1 :

$$E_p(u+\delta u) - E_p(u) = \underbrace{E_p'(u)\,\delta u}_{\delta E_p} + o(\delta u).$$

On veut $\delta E_p = 0$, c'est-à-dire

$$E_p'(u)\,\delta u = 0 \quad \forall\, \delta u \qquad \Longrightarrow \qquad (k\,u - F)\,\delta u = 0 \quad \forall\, \delta u.$$

La quantité δu est ce que l'on va appeler un **déplacement virtuel** : elle « teste » cette direction. On peut poser $\delta u = h\,u^0$ et, puisque l'équation est linéaire, on retrouve

$$(k\,u - F)\,u^0 = 0 \qquad \forall\, u^0.$$

En 1D, garder δu et pas juste $E_p' = 0$ est artificiel, mais en mécanique des milieux continus on ne peut pas dériver E_p par rapport à l'infinité de valeurs $\underline{u}(\underline{x})$ en tout point : d'où la notion de **dérivée de Gâteaux** (Section 4.1.3.2).

4.1.1.3 Démonstration du PTV

Démonstration : $\underline{\underline{\sigma}}^\star \in \mathrm{SA} \Longrightarrow$ PTV

Soit $\underline{\underline{\sigma}}^\star \in \mathrm{SA}$ et $\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0$. L'équilibre donne

$$\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}^\star + \underline{f}_v = \underline{0} \implies \mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}^\star \cdot \underline{u}^0 + \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0 = 0 \implies \int_\Omega \left(\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}^\star \cdot \underline{u}^0 + \underline{f}_v \cdot \underline{u}^0\right) \mathrm{d}V = 0.$$

On rappelle que (en notation d'Einstein, avec $\underline{\underline{\sigma}}$ symétrique)

$$\operatorname{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{u}^0\right) = \left(\sigma_{ij}\,u_j^0\right)_{,i} = \sigma_{ij,i}\,u_j^0 + \sigma_{ij}\,u_{j,i}^0 = \underbrace{\sigma_{ji,i}\,u_j^0}_{\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{u}^0} + \underbrace{\sigma_{ij}\,u_{j,i}^0}_{\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}^0},$$

d'où

$$\int_\Omega \operatorname{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}^\star\,\underline{u}^0\right)\mathrm{d}V - \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^\star : \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}^0\,\mathrm{d}V + \int_\Omega \underline{f}_v\cdot\underline{u}^0\,\mathrm{d}V = 0.$$

Par le théorème de Green (flux-divergence),

$$\int_{\partial\Omega}\left(\underline{\underline{\sigma}}^\star\,\underline{n}\right)\cdot\underline{u}^0\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^\star : \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}^0\,\mathrm{d}V + \int_\Omega \underline{f}_v\cdot\underline{u}^0\,\mathrm{d}V = 0.$$

Par symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}^\star$, $\underline{\underline{\sigma}}^\star : \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}^0 = \underline{\underline{\sigma}}^\star : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)$. En effet,

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} = \tfrac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,u_{i,j} + \tfrac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,u_{i,j} = \tfrac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,u_{i,j} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\sigma_{ji}\,u_{i,j}}_{=\sigma_{ij}\,u_{j,i}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}).$$

Soit, en séparant $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_f$:

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^\star : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\,\mathrm{d}V = \underbrace{\int_{\partial\Omega_u}\left(\underline{\underline{\sigma}}^\star\,\underline{n}\right)\cdot\underbrace{\underline{u}^0}_{=\underline{0}}\,\mathrm{d}S}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_f}\underbrace{\left(\underline{\underline{\sigma}}^\star\,\underline{n}\right)}_{=\underline{f}_s}\cdot\underline{u}^0\,\mathrm{d}S + \int_\Omega \underline{f}_v\cdot\underline{u}^0\,\mathrm{d}V}_{W_{\mathrm{ext}}(\underline{u}^0)}.$$

i Démonstration : PTV $\Longrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^\star \in$ SA

On suppose

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}}^\star : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\,\mathrm{d}V - \int_\Omega \underline{f}_v\cdot\underline{u}^0\,\mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega_f}\underline{f}_s\cdot\underline{u}^0\,\mathrm{d}S = 0, \qquad \forall\,\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0.$$

De même, $\underline{\underline{\sigma}}^\star$ étant symétrique, $\underline{\underline{\sigma}}^\star : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0) = \underline{\underline{\sigma}}^\star : \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}^0 = \operatorname{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}^\star\,\underline{u}^0\right) - \operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}^\star\cdot\underline{u}^0$, d'où, avec le théorème de Green et puisque $\underline{u}^0 = \underline{0}$ sur $\partial\Omega_u$ (le terme de bord se réduit à $\int_{\partial\Omega_f}(\underline{\underline{\sigma}}^\star\,\underline{n})\cdot\underline{u}^0\,\mathrm{d}S$) :

$$\int_{\partial\Omega_f}\left(\underline{\underline{\sigma}}^\star\,\underline{n} - \underline{f}_s\right)\cdot\underline{u}^0\,\mathrm{d}S - \int_\Omega\left(\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}^\star + \underline{f}_v\right)\cdot\underline{u}^0\,\mathrm{d}V = 0, \qquad \forall\,\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0.$$

Donc, **en choisissant judicieusement** les $\underline{u}^0$, on peut montrer la relocalisation des équations en utilisant le **lemme fondamental du calcul des variations** : il faut choisir pour Ω (resp. $\partial\Omega_f$) une « bosse » nulle sur $\partial\Omega$ (resp. sur le reste du bord), centrée sur un point de Ω (resp. $\partial\Omega_f$), pour relocaliser.

1. Des $\underline{u}^0$ nuls sur tout $\partial\Omega$, concentrés autour d'un point de Ω : le terme de bord disparaît, et il reste $\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}^\star + \underline{f}_v = \underline{0}$ dans Ω.
2. On réinjecte ce résultat : il ne reste que $\int_{\partial\Omega_f}\left(\underline{\underline{\sigma}}^\star\,\underline{n} - \underline{f}_s\right)\cdot\underline{u}^0\,\mathrm{d}S = 0$, et des $\underline{u}^0$ concentrés près d'un point de $\partial\Omega_f$ donnent $\underline{\underline{\sigma}}^\star\,\underline{n} = \underline{f}_s$ sur $\partial\Omega_f$.

Par exemple, avec $\varphi \geq 0$ une bosse nulle sur $\partial\Omega$, le choix $\underline{u}^0 = \varphi\left(\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}^\star + \underline{f}_v\right)$ donne $\int_\Omega \varphi\left|\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}^\star + \underline{f}_v\right|^2\mathrm{d}V = 0$, donc $\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}^\star + \underline{f}_v = \underline{0}$ là où $\varphi > 0$.

4.1.2 Théorème d'unicité

Théorème d'unicité

En élasticité linéaire (et, plus généralement, en HPP avec une énergie convexe) :
- le champ de **déplacement**, quand il existe, est unique à un déplacement de corps rigide CA0 près,
- le champ de **contrainte**, quand il existe, est unique.

Démonstration

Soient deux solutions distinctes $(\underline{u}^1, \underline{\underline{\sigma}}^1)$ et $(\underline{u}^2, \underline{\underline{\sigma}}^2) \in \mathrm{CA} \times \mathrm{SA}$. Le PTV donne, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^i) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\, \mathrm{d}V = W_{\mathrm{ext}}(\underline{u}^0), \qquad \forall\, \underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0.$$

Par linéarité, en faisant la différence (1) − (2) :

$$\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\, \mathrm{d}V = 0, \qquad \forall\, \underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0.$$

On peut notamment prendre $\underline{u}^0 = \underline{u}^1 - \underline{u}^2$ (qui est bien CA0) :

$$\int_\Omega \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2)}_{\geq 0}\, \mathrm{d}V = 0.$$

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ est défini positif, donc l'intégrande est positif ou nul, et cette quantité doit donc être nulle partout pour annuler l'intégrale. $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ étant défini, on en déduit

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) = \underline{\underline{0}},$$

soit : $\underline{u}^1$ et $\underline{u}^2$ diffèrent d'un mouvement de corps rigide près. Par ailleurs,

$$\underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{\sigma}}^2 = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^1 - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^2 = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^1 - \underline{\underline{\varepsilon}}^2\right) = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) = \underline{\underline{0}}.$$

D'où $\underline{\underline{\sigma}}^1 = \underline{\underline{\sigma}}^2$, et $\underline{u}^1$ et $\underline{u}^2$ ne diffèrent que d'un mouvement de corps rigide.

Remarque : positivité de $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ en notation de Voigt

En notation de Voigt (séance 1), $\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\}$: dire que $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ est défini positif revient à dire que la matrice 6×6 $[C]$ est symétrique définie positive. C'est ce qui permet de « sentir » que $\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}}$.

4.1.3 Énergie potentielle d'une configuration CA

! Définitions

Soit $\underline{u}^\star \in \mathrm{CA}$. On définit :

— l'**énergie élastique**

$$W_{\text{élas}}(\underline{u}^\star) = \frac{1}{2}\int_\Omega \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star)\,\mathrm{d}V,$$

— le **travail des efforts extérieurs**

$$W_{\text{ext}}(\underline{u}^\star) = \int_\Omega \underline{f}_v \cdot \underline{u}^\star\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega_f} \underline{f}_s \cdot \underline{u}^\star\,\mathrm{d}S,$$

— l'**énergie potentielle totale**

$$W(\underline{u}^\star) = W_{\text{élas}}(\underline{u}^\star) - W_{\text{ext}}(\underline{u}^\star).$$

! Théorème de l'énergie potentielle

Le champ de déplacement $\underline{u}$ est solution du problème d'équilibre élastostatique si et seulement s'il possède la plus petite énergie potentielle parmi tous les champs de déplacement $\underline{u}^\star$ cinématiquement admissibles :

$$W(\underline{u}) \leq W(\underline{u}^\star), \qquad \forall\, \underline{u}^\star \in \mathrm{CA}. \tag{20}$$

i Remarque : construction de solutions approchées

Ce théorème permet de construire des **solutions approchées en déplacement** lorsque la solution exacte est hors d'atteinte analytiquement :

1. on restreint la recherche à un **sous-espace simplifié** (de dimension finie, souvent) de champs admissibles $\widetilde{\mathrm{CA}} \subset \mathrm{CA}$,
2. on minimise W dans ce sous-espace restreint.

Si la solution exacte $\underline{u} \in \widetilde{\mathrm{CA}}$, la minimisation la trouve. Sinon, on trouve la **meilleure solution approchée** $\tilde{\underline{u}} \in \widetilde{\mathrm{CA}}$ (au sens de l'énergie, Figure 12). La solution approchée sera d'autant plus proche de la solution exacte que $\widetilde{\mathrm{CA}}$ est riche et pertinent.

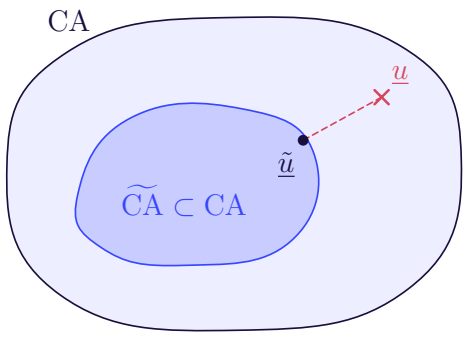

FIGURE 12 : Sous-espace restreint $\widetilde{\mathrm{CA}} \subset \mathrm{CA}$ et meilleure approximation $\tilde{\underline{u}}$.

4.1.3.1 Démonstration : équilibre $\Longrightarrow$ énergie minimale

Démonstration

Soit $\underline{u}$ la solution (équilibre) et $\underline{u}^\star \in \mathrm{CA}$. Par linéarité de W_{ext},

$$W(\underline{u}^\star) - W(\underline{u}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\Big(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star) - \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\Big)\,\mathrm{d}V - W_{\mathrm{ext}}(\underline{u}^\star - \underline{u}).$$

On note $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^\star = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star)$:

$$W(\underline{u}^\star) - W(\underline{u}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\Big[\underline{\underline{\varepsilon}}^\star : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\Big]\,\mathrm{d}V - W_{\mathrm{ext}}(\underline{u}^\star - \underline{u}).$$

On fait apparaître l'écart $\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}}$ en écrivant $\underline{\underline{\varepsilon}}^\star = \underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}})$:

$$W(\underline{u}^\star) - W(\underline{u}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\Big[(\underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}})) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}})) - \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\Big]\,\mathrm{d}V - W_{\mathrm{ext}}(\underline{u}^\star - \underline{u}).$$

On développe le premier terme :

$$\begin{aligned}
&(\underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}})) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}})) \\
&\quad = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}}) \\
&\qquad + (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}}) \\
&\quad = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + 2\,\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}}) + (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}}),
\end{aligned}$$

par la **grande symétrie** de $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$. Les termes $\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ se simplifient :

$$W(\underline{u}^\star) - W(\underline{u}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\,(\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}}) + \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}}_{\underline{\underline{\sigma}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}})\,\mathrm{d}V - W_{\mathrm{ext}}(\underline{u}^\star - \underline{u}).$$

Par linéarité, $\underline{\underline{\varepsilon}}^\star - \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star - \underline{u})$, d'où

$$W(\underline{u}^\star) - W(\underline{u}) = \underbrace{\int_\Omega \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star - \underline{u}) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star - \underline{u})\,\mathrm{d}V}_{\geq 0} + \underbrace{\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star - \underline{u})\,\mathrm{d}V - W_{\mathrm{ext}}(\underline{u}^\star - \underline{u})}_{=0 \text{ par le PTV, avec } \underline{u}^\star - \underline{u} \in \mathrm{CA}_0}.$$

Donc $W(\underline{u}^\star) \geq W(\underline{u})$ pour tout $\underline{u}^\star \in \mathrm{CA}$: $\underline{u}$ minimise W.

4.1.3.2 Dérivée de Gâteaux

$\underline{u}(\underline{x})$ étant de dimension possiblement infinie, on introduit une **dérivée directionnelle** : la dérivée de Gâteaux. Plutôt que de dériver par rapport à $\underline{u}$, on se donne une **direction** $\underline{u}^0$ dans laquelle on étudie la variation de W :

$$h \longmapsto W(\underline{u} + h\,\underline{u}^0), \qquad h \in \mathbb{R} \text{ (un scalaire)}.$$

Définition : dérivée de Gâteaux

La dérivée de W en $\underline{u}$ dans la direction $\underline{u}^0$ est

$$DW(\underline{u})(\underline{u}^0) = \lim_{h \to 0} \frac{W(\underline{u} + h\,\underline{u}^0) - W(\underline{u})}{h}.$$

En un minimum, la dérivée de Gâteaux est **nulle dans toutes les directions** (admissibles).

Analogie avec le ressort

Pour le ressort, $W(u) = \frac{1}{2}\,k\,u^2 - F\,u$ et

$$W(u + h\,u^0) = W(u) + h\,(k\,u - F)\,u^0 + \frac{h^2}{2}\,k\,u^{0\,2},$$

d'où $DW(u)(u^0) = (k\,u - F)\,u^0$. Le terme en h (la pente) donne la stationnarité, c'est-à-dire le PTV, et le terme en h^2 (la courbure, positive car $k > 0$) donne le minimum.

4.1.3.3 Démonstration : énergie minimale $\Longrightarrow$ équilibre

Démonstration

On considère une variation $\underline{u} + h\,\underline{u}^0$ autour du minimum $\underline{u}$, avec $\underline{u} \in \mathrm{CA}$ et $\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0$, d'où $\underline{u} + h\,\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}$.
$\underline{u}$ est un minimum, donc la dérivée de Gâteaux est nulle dans toutes les directions :

$$\lim_{h\to 0} \frac{W(\underline{u} + h\,\underline{u}^0) - W(\underline{u})}{h} = 0.$$

En développant l'énergie élastique (grande symétrie de $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$) et par linéarité de W_{ext},

$$W(\underline{u} + h\,\underline{u}^0) - W(\underline{u}) = h\left[\int_\Omega \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\,\mathrm{d}V - W_{\text{ext}}(\underline{u}^0)\right] + h^2\,W_{\text{élas}}(\underline{u}^0),$$

d'où

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_\Omega \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\,\mathrm{d}V - W_{\text{ext}}(\underline{u}^0) + h\,W_{\text{élas}}(\underline{u}^0)\right] = 0$$

et finalement

$$\int_\Omega \underbrace{\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})}_{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^0)\,\mathrm{d}V - W_{\text{ext}}(\underline{u}^0) = 0, \qquad \forall\,\underline{u}^0 \in \mathrm{CA}_0.$$

C'est le PTV : $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$ est SA, d'où l'équilibre.

4.2 Application — Bloc encastré en flexion simple

Énoncé

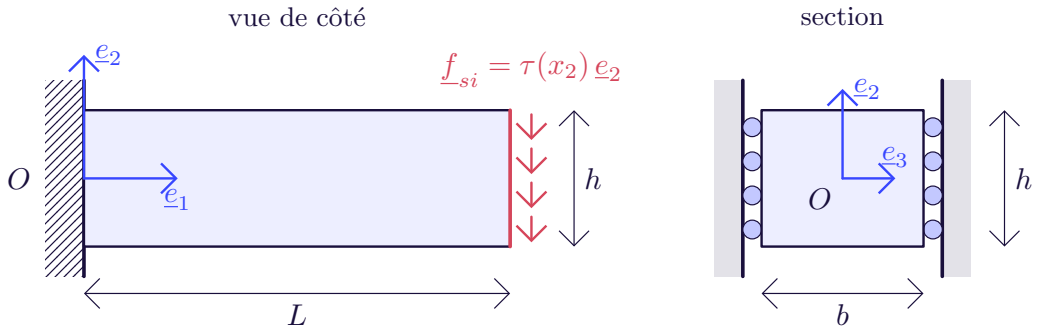

FIGURE 13 : Bloc encastré en $x_1 = 0$ et chargé en $x_1 = L$: vue de côté (à gauche) et section (à droite), les bords latéraux $x_3 = \pm b/2$ glissant sans frottement sur deux parois.

On étudie un bloc d'épaisseur h et de profondeur b, encastré en $x_1 = 0$ et chargé sur son extrémité libre en $x_1 = L$ (Figure 13). Le matériau est élastique linéaire isotrope (λ, μ) et on néglige les efforts volumiques.

- **Bord gauche** ($x_1 = 0$) : encastrement.
- **Bords haut et bas** ($x_2 = \pm h/2$) : bords libres.
- **Bords latéraux** ($x_3 = \pm b/2$) : contact sans frottement.
- **Bord droit** ($x_1 = L$) : effort surfacique purement tangentiel $\underline{f}_{si}(x_2) = \tau(x_2)\,\underline{e}_2$, de résultante connue

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau(x_2)\, b \,\mathrm{d}x_2 = -F, \qquad F > 0.$$

Approximation de la solution du problème

1. Écrire le problème aux limites.
2. Proposer une famille de champs CA.
3. Calculer l'énergie potentielle associée.
4. Minimiser l'énergie potentielle et en déduire une approximation de la solution.

Correction

1. Problème aux limites.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}, \qquad \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\,\operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}} \quad \text{dans } \Omega, \\ \underline{u}(0, x_2, x_3) = \underline{0}, \\ \underline{\underline{\sigma}}(x_1, \pm h/2, x_3)\,(\pm \underline{e}_2) = \underline{0}, \\ u_3(x_1, x_2, \pm b/2) = 0, \qquad \left(\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, \pm b/2)\,\underline{e}_3\right) \cdot \underline{e}_1 = \left(\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, \pm b/2)\,\underline{e}_3\right) \cdot \underline{e}_2 = 0, \\ \underline{\underline{\sigma}}(L, x_2, x_3)\,\underline{e}_1 = \tau(x_2)\,\underline{e}_2. \end{cases}$$

La solution analytique est difficile à obtenir. On cherche donc une solution approchée.

2. Famille de champs CA. On choisit un sous-espace de dimension 2,

$$\underline{u}^\star(x_1, x_2, x_3) = \alpha\, x_1 x_2\, \underline{e}_1 + \beta\, x_1^2\, \underline{e}_2, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

En $x_1 = 0$, $\underline{u}^\star = \underline{0}$, et $u_3^\star = 0$ partout. On vérifie donc que $\underline{u}^\star \in \mathrm{CA}$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

3. Énergie potentielle. La déformation associée est

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star) = \begin{pmatrix} \alpha\, x_2 & \frac{1}{2}(\alpha+2\beta)\, x_1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\alpha+2\beta)\, x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \alpha\, x_2.$$

L'énergie élastique vaut

$$\begin{aligned} W_{\text{élas}} &= \int_\Omega \frac{1}{2}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^\star)\, \mathrm{d}V = \int_\Omega \frac{1}{2} \left[\lambda\, (\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left[(\lambda+2\mu)\, (\alpha\, x_2)^2 + \mu\, (\alpha+2\beta)^2 x_1^2 \right] b\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2, \end{aligned}$$

soit

$$W_{\text{élas}} = \frac{1}{2} \left[\underbrace{(\lambda+2\mu)\, \frac{bh^3 L}{12}}_{C_1}\, \alpha^2 + \underbrace{\frac{\mu\, bhL^3}{3}}_{C_2}\, (\alpha+2\beta)^2 \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

avec $K_{11} = C_1 + C_2$, $K_{12} = 2C_2$ et $K_{22} = 4C_2$.
Seul le bord droit est chargé. Le travail des efforts extérieurs vaut

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \int_{\partial\Omega_f} \underline{f}_{si} \cdot \underline{u}^\star\, \mathrm{d}S = \int_{-h/2}^{h/2} \tau(x_2)\, \underline{e}_2 \cdot \left(\alpha\, L\, x_2\, \underline{e}_1 + \beta\, L^2\, \underline{e}_2 \right) b\, \mathrm{d}x_2 \\ &= \beta\, L^2 \int_{-h/2}^{h/2} \tau(x_2)\, b\, \mathrm{d}x_2 = -\beta\, L^2\, F. \end{aligned}$$

Le terme en α disparaît car $\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1 = 0$. Seule la résultante F intervient, quelle que soit la répartition $\tau(x_2)$. L'énergie potentielle est alors

$$W(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\, (K_{11}\, \alpha^2 + 2K_{12}\, \alpha\beta + K_{22}\, \beta^2) + \beta\, L^2\, F.$$

4. Minimisation. W est minimale lorsque

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = K_{11}\, \alpha + K_{12}\, \beta = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \beta} = K_{12}\, \alpha + K_{22}\, \beta = -FL^2.$$

Par les formules de Cramer, avec $K_{11}K_{22} - K_{12}^2 = 4\, C_1 C_2$:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 & K_{12} \\ -FL^2 & K_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{vmatrix}} = \frac{FL^2\, K_{12}}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} = \frac{6\, FL}{(\lambda+2\mu)\, bh^3},$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} K_{11} & 0 \\ K_{12} & -FL^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{FL^2\, K_{11}}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} = -\frac{3\, FL}{(\lambda+2\mu)\, bh^3} - \frac{3\, F}{4\, \mu\, bhL}.$$

L'approximation de la solution est donc $\underline{\tilde{u}} = \alpha\, x_1 x_2\, \underline{e}_1 + \beta\, x_1^2\, \underline{e}_2$ avec ces valeurs de α et β.

4.2.1 Paysage énergétique

> ⚠ Attention : minimum dans $\widetilde{\mathrm{CA}}$, pas dans CA
>
> Dans cette section, W n'est tracée que sur le sous-espace $\widetilde{\mathrm{CA}}$ de dimension 2 des champs $\underline{u}^\star = \alpha\, x_1 x_2\, \underline{e}_1 + \beta\, x_1^2\, \underline{e}_2$, paramétré par (α, β). Le fond de la vallée est le minimum de W **dans ce plan**, c'est-à-dire la solution approchée $\tilde{\underline{u}}$, et non le vrai minimum de W sur l'espace CA de tous les déplacements admissibles, qui est la solution exacte $\underline{u}$. Comme $\widetilde{\mathrm{CA}} \subset \mathrm{CA}$, on a $W(\underline{u}) \leq W(\tilde{\underline{u}})$: le vrai minimum est plus bas que le fond de cette vallée (Figure 12).

L'énergie potentielle $W(\alpha, \beta)$ est une forme quadratique définie positive plus un terme linéaire : c'est un paraboloïde elliptique, dont le minimum est le couple (α, β) trouvé à la question 4. Comme $C_2 \gg C_1$ pour un bloc élancé, la vallée est très allongée : on se déplace presque sans coût énergétique le long de la direction $\alpha + 2\beta = \text{cste}$, celle où le cisaillement ε_{12} ne change pas, c'est-à-dire, en variables réduites, presque le long de la diagonale $\alpha/\alpha_{\text{opt}} = \beta/\beta_{\text{opt}}$. Dans les figures ci-dessous, α et β sont rapportés à leurs valeurs optimales α_{opt} et β_{opt}, et W à $|W_{\min}|$.

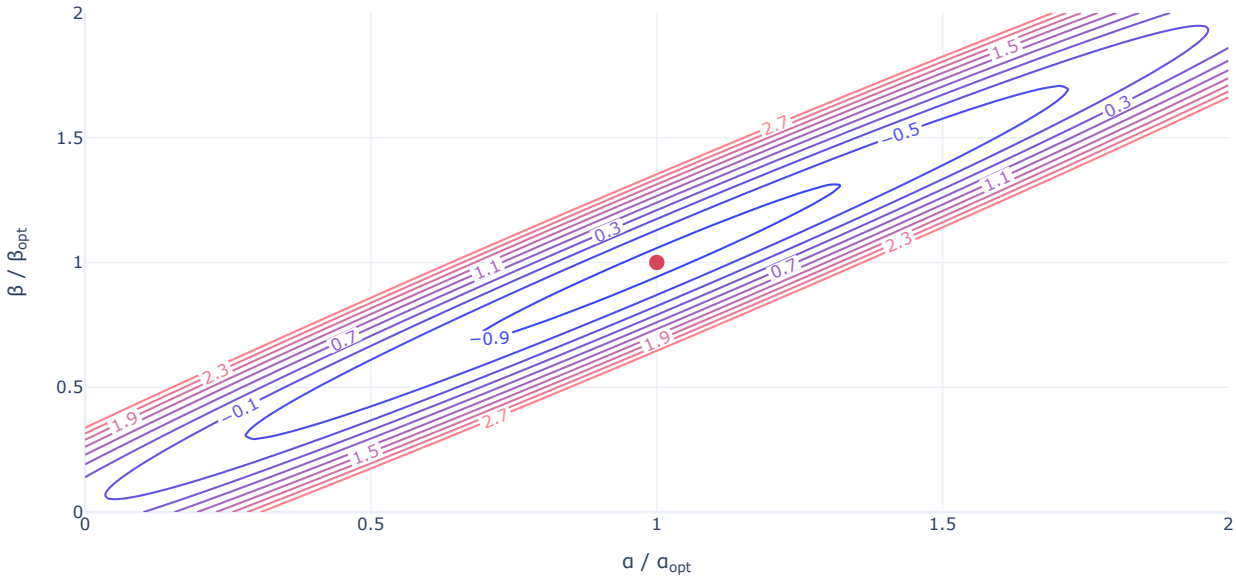

FIGURE 14 : Lignes de niveau de l'énergie potentielle $W(\alpha, \beta)/|W_{\min}|$. La solution approchée (point corail) est au fond de la vallée. La version HTML propose un tracé 3D interactif.

4.2.2 Comparaison avec une solution éléments finis

Les bords latéraux glissants imposent $u_3 = 0$ et rendent le problème plan ($\varepsilon_{i3} = 0$) : on peut le résoudre en **déformations planes** dans le plan (x_1, x_2). On le fait ici avec une méthode des éléments finis volontairement minimale, en quelques lignes de `numpy` : 24 quadrangles bilinéaires (12 dans la longueur, 2 dans l'épaisseur), et un cisaillement τ uniforme sur le bord droit. Le principe est exactement celui de la Section 4.1.3 : on minimise W sur un sous-espace $\widetilde{\mathrm{CA}}$ de dimension finie, celui des champs continus et bilinéaires par élément. Un maillage beaucoup plus fin (80×16 éléments) sert de référence.

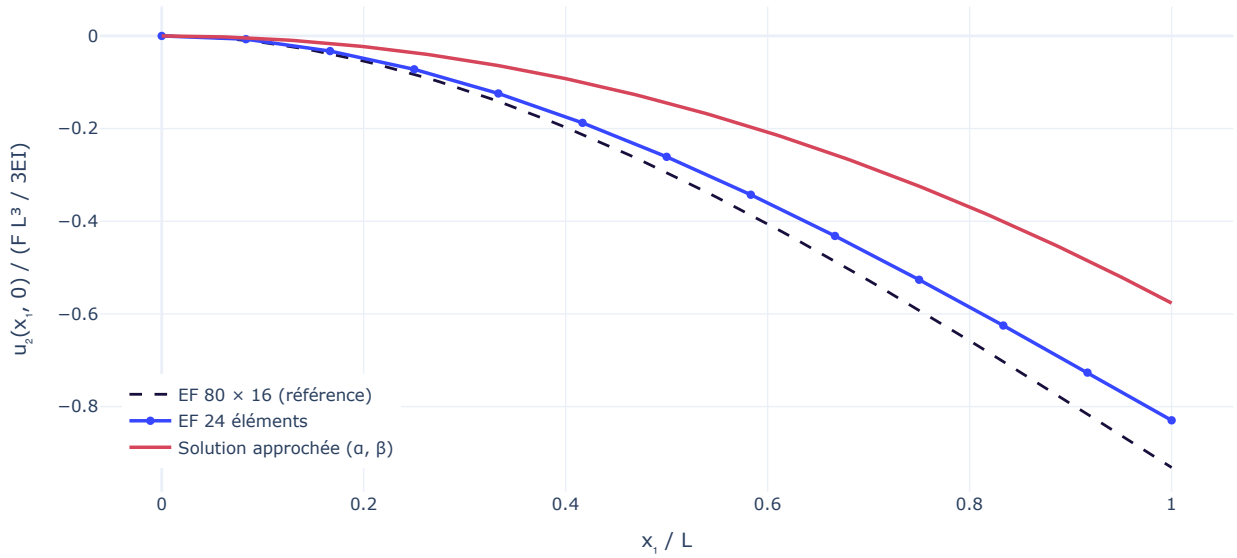

FIGURE 15 : Bloc encastré en flexion simple : flèche $u_2(x_1, 0)$ le long de la fibre moyenne, rapportée à la flèche de la théorie des poutres $FL^3/(3EI)$. La solution approchée à deux paramètres et la solution éléments finis à 24 éléments sont toutes deux plus raides que la référence : elles minimisent W sur un sous-espace de CA.

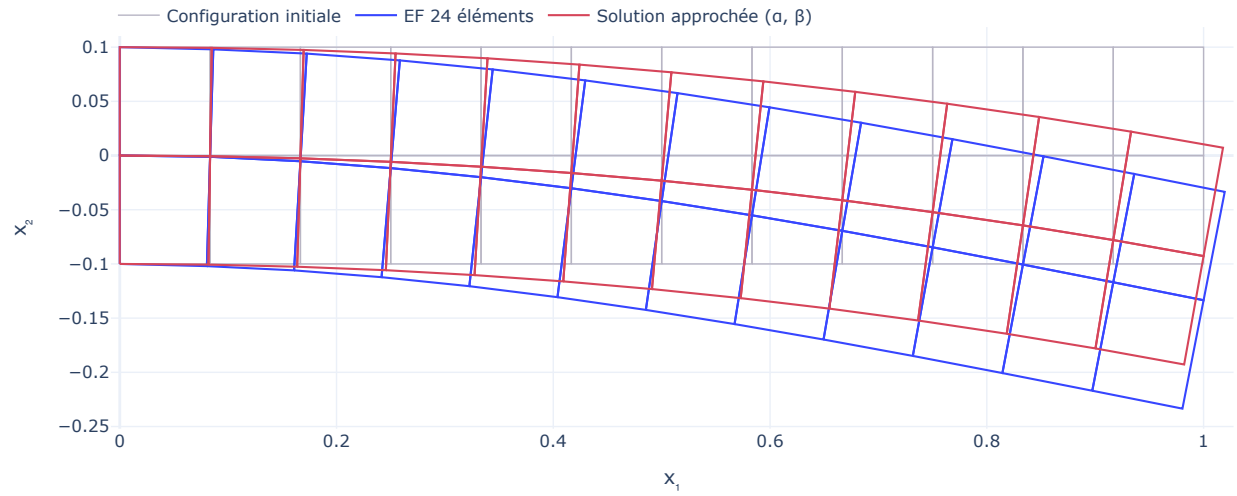

FIGURE 16 : Déformées (amplifiées) du bloc : maillage éléments finis à 24 éléments (bleu) et solution approchée $\tilde{\underline{u}} = \alpha\, x_1 x_2\, \underline{e}_1 + \beta\, x_1^2\, \underline{e}_2$ (corail), sur la configuration initiale (gris).