Loi de comportement

0. Rappels de MMC Ce que l'on sait du cours de MMC :



pour info.

Changement de notation. $\vec{u} \to \underline{u}$ $\quad \vec{a} \to \underline{\Gamma}$

$\vec{\vec{F}} \to \underline{\underline{F}}$

$\vec{\vec{\sigma}} \to \underline{\underline{\sigma}}$

$\vec{\vec{\nabla}} \to \underline{\underline{\nabla}}$

- On sait décrire la cinématique d'un solide qui se déforme.

via

- la transformation $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{X})$ avec
- son gradient $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{\varphi} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}$
- le tenseur de déformation : $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left({}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}\right)$.

⚠ - Hypothèse de petites perturbations (HPP) : cadre dans lequel on se place pour ce cours

En HPP :

Déformation : • $\underline{\underline{\varepsilon}}$ = linéarisation de $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{{}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}}_{\underline{\underline{C}}} - \underline{\underline{1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{{}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}}_{\text{linéaire}} + \underbrace{{}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\,\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}}_{\text{non linéaire}}\right)$

⚠ à bien rappeler cela et que $\underline{\underline{\varepsilon}}$ n'est vrai qu'en HPP → c.l. MMC.

↳ en HPP, $\|\underline{u}\| \ll 1$, $\|\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\| \ll 1 \Rightarrow {}^t\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u}\,\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} \simeq \underline{\underline{0}}$

- élongation. $d\underline{x} = \underline{\underline{F}}\,d\underline{X}$ ↳ e_i

$$\|d\underline{x}\| = \sqrt{d\underline{x}\cdot d\underline{x}} = \sqrt{\underline{\underline{F}}\,d\underline{x}\cdot\underline{\underline{F}}\,d\underline{x}} = \text{↳}\sqrt{\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}\cdot\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}}$$

$\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}\cdot\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i} = {}^t(\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i})(\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}) = {}^t\underline{e_i}\,{}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}$

D'où l'allongement relatif $\dfrac{\|d\underline{x}\| - \|d\underline{X}\|}{\|d\underline{X}\|}$

$\underline{\underline{C}} = 2\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{1}}$

$\simeq 2\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{1}}$

$$\sqrt{{}^t\underline{e_i}\,{}^t\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{e_i}} - 1 = \sqrt{1+2\varepsilon_{ii}} - 1 \simeq \varepsilon_{ii}$$

Donc ε_{ii} mesure l'allongement relatif dans la direction $\underline{e_i}$.

Mesure de la variation de volume :

en HPP, $det(\underline{\underline{F}}) = det \begin{pmatrix} 1+u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ \vdots & 1+u_{2,2} & u_{2,3} \\ \vdots & \cdots & 1+u_{3,3} \end{pmatrix}$ (en négligeant les termes du haut ordre faisant intervenir des $\sim u^2$)

idem $\simeq (1+u_{1,1})(1+u_{2,2})(1+u_{3,3})$

$\simeq 1 + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}$

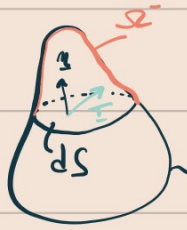
$\simeq 1 + tr(\underline{\underline{\nabla}}\underline{u}) = 1 + tr(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}))$

D'où $dV \simeq (1 + tr(\underline{\underline{\varepsilon}}))\, dV_0 \Rightarrow \dfrac{dV - dV_0}{dV_0} = tr(\underline{\underline{\varepsilon}})$

mesure la déformation volumique.

Contrainte :

- On a également introduit un objet décrivant les efforts à l'intérieur de la matière : le tenseur de contrainte de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$



les efforts surfaciques exercés par Ω^- sur Ω^+ à travers dS sont donnés par $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}$.

L'équilibre (PFD) donne : $-div\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f_v} = \rho\,\underline{\gamma}$ dans Ω ; $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$ dans Ω.

$\mathcal{P}: \underline{F} = m\underline{\gamma}_G \rightarrow \int_\Omega \underline{f}\,d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}\,dS = \int_\Omega \rho\underline{\gamma}$ $\rightarrow \int_\Omega \underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}}\,d\Omega$ $\forall \Omega$

- Les conditions aux limites :

- déplacement (Dirichlet) : $\underline{u_i}(\Pi) = \underline{u_{d_i}}$ $\forall \Pi \in \partial\Omega_{u_i}$
- Effort (Neumann) : $\underline{T_i}(\Pi) = \underline{F_{d_i}}$ $\forall \Pi \in \partial\Omega_{f_i}$

Bilan de ce que l'on sait :

- Résoudre un problème de mécanique des milieux continus solide signifie trouver en tout point $\underline{\Pi} \in \Omega$,
  - le champ de déplacement $\underline{u}(\Pi)$ - 3 inconnues
  - le champ des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\Pi)$ - 6 inconnues.
  - le champ des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\Pi)$ - 6 inconnues.

15 inconnues.

- Pour cela nous disposons, après le calcul de NK, des équations suivantes :
  - $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\nabla}}_{sym}\, \underline{u}$: 6 équations.
  - $\mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho \underline{\gamma}$: 3 equations

$\Rightarrow$ 9 equations.

I. Notion de loi de comportement.

Il nous manque alors 6 equations pour espérer pouvoir résoudre le pb de mécanique avec une logique purement cinématique. (on parle ici dans le volume pas de CL).

En effet, les équations décrites plus haut ne décrivent que la cinématique et le respect du PFD mais sont aveugles à la matière du solide étudié.

Des 6 équations manquantes pour fermer le problème viennent décrire le comportement de la matière.

Analogie avec le ressort



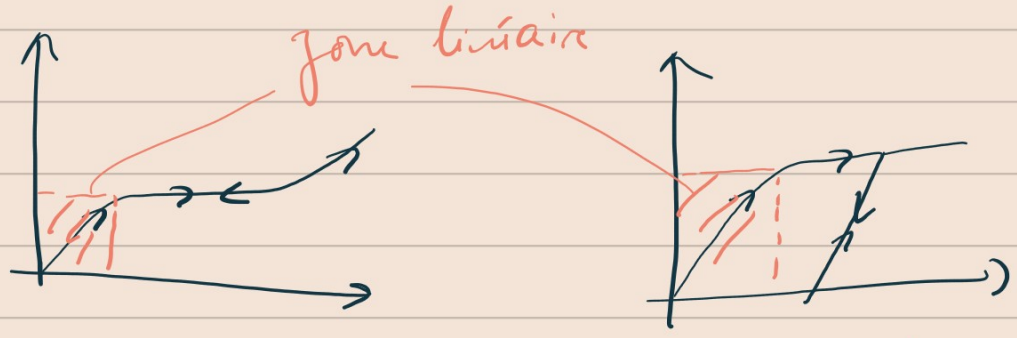
- cinématique $\Delta l = x - x_0 \sim \varepsilon$
- PFD : $m\ddot{x} = F_{ext} - F_{ressort} \sim \mathrm{div}\, \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho \underline{\gamma}$
- $\rightarrow$ la loi de Hooke ferme le problème :

$F_{ressort} = -k \Delta l$.

Nous appellerons loi de comportement la fonction tensorielle qui relie la contrainte et la déformation.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{u}), T, \dots)$$

Exemples de tracés illustrant certains liens $\underline{\underline{\varepsilon}} / \underline{\underline{\sigma}}$.



Il existe une grande variété de comportements et l'objet de ce cours est d'étudier l'élasticité linéaire.

Elasticité : l'état de contrainte à un instant donné dépend uniquement de l'état de déformation à ce même instant (indépendant de l'histoire de chargement et de la vitesse de chargement).

↳ pas de dissipation : le comportement est réversible.

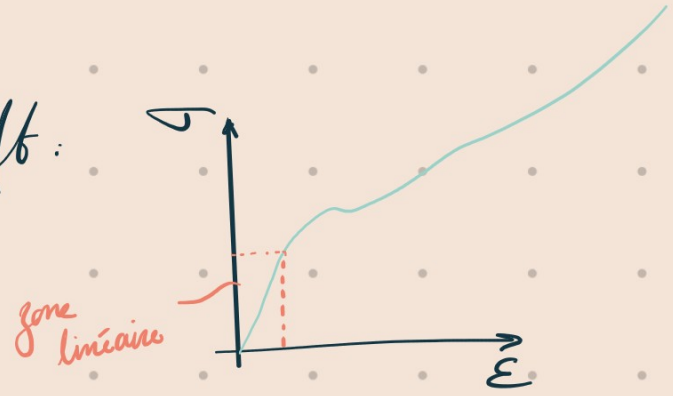
Linéaire :
- Valide uniquement sous l'hypothèse des HPP.
- linéarité de la relation reliant le tenseur de déformation linéarisé et le tenseur de Cauchy.

Potentiel élastique

Puisque le travail de déformation est indépendant du chemin de chargement, la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ dérive d'un potentiel w_{el} tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial w_{el}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \iff \sigma_{ij} = \frac{\partial w_{el}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Draft :



σ est linéaire en ε. Cela signifie que :

$$\sigma_{11} = C_{11} \varepsilon_{11} + C_{12} \varepsilon_{12} + C_{13} \varepsilon_{13} \cdots$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{33} = C_{33} \varepsilon_{13} + C_{33} \varepsilon_{23} + C_{33} \varepsilon_{33} \cdots$$

D'où l'introduction d'un tenseur d'ordre 4 (quatre indices) $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ tq $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$

Analogie avec $F = -k \Delta x$

De là on peut définir une potentiel élastique qui caractérise le matériaux : $w_{el} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$

Analogie à $w = \frac{1}{2} k \Delta x^2$

Par définition une force est conservative si son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi.

On part d'un point $\underline{O}$ arbitraire, vers un point $\underline{n}$ et on pose :

$$E_p(\underline{n}) = -W_{O \to n}(\underline{F}) = -\int_O^n \underline{F} \cdot d\underline{x}$$

↳ l'intégrale a une valeur unique car le travail ne dépend du chemin, $E_p(\underline{n})$ est donc une fonction d'état.

Étudions maintenant la variation de E_p entre deux points $\underline{n}$ et $\underline{n'}$ infiniment proches :

$$dE_p = E_p(\underline{n'}) - E_p(\underline{n})$$

$$= -\int_O^{\underline{n'}} \underline{F} \cdot d\underline{x} + \int_O^{\underline{n}} \underline{F} \cdot d\underline{x}$$

$\underline{F}$ constante entre $\underline{n}$ et $\underline{n'}$ infiniment proches

$$\int_O^n + \int_n^{n'}$$

car indép chemin + Chasles.

$$= -\int_n^{\underline{n'}} \underline{F} \cdot d\underline{x} = -\underline{F} \cdot \int_n^{\underline{n'}} d\underline{x}$$

↳ $\underline{n'} = \underline{n} + d\underline{x}$

$$= -\underline{F} \cdot d\underline{x}$$

par identification, $dE_p = \underline{grad}(E_p) \cdot d\underline{x}$

d'où $\boxed{\underline{F} = -\underline{grad}(E_p)}$

De manière analogue, le travail élémentaire reçu par la matière (opposé à celui fourni par le effet intérieur), vaut : $\delta w = \underline{\underline{\Sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}$.

puisque ce travail est indépendant du chemin, on peut définir une fonction unique $W(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \int_{\underline{\underline{0}}}^{\underline{\underline{\varepsilon}}} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}})\, d\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$

$$dW = W(\underline{\underline{\varepsilon}} + d\underline{\underline{\varepsilon}}) - W(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$= \int_{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{\underline{\underline{\varepsilon}} + d\underline{\underline{\varepsilon}}} \underline{\underline{\Sigma}} : d\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$$

$\underline{\underline{\Sigma}}$ constant sur $d\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$= \underline{\underline{\Sigma}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}$$

par identification, $dW = \dfrac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : d\underline{\underline{\varepsilon}}$

d'où $\underline{\underline{\Sigma}} = \dfrac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$.

Rq : ① En prépa on travail avec $\underline{F}$, la force de rappel du ressort qui s'oppose au mouvement, on note, la convention est que $\underline{\Sigma}$ représente l'effort appliqué à la matière pour garantir la cohésion d'où

- $\underline{F} = -\text{grad}(E_p)$
- $\underline{\underline{\Sigma}} = +\dfrac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$

② δw : échange d'énergie avec l'extérieur, quantité de travail fournie.

dW : variation d'énergie (stockée) suite aux déformations passées

Potentiel élastique linéaire.

La relation linéaire entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est spécifiée par un tenseur d'ordre 4 tq :

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$ soit par identification, $C_{ijkl} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$



$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{12} + C_{13}\varepsilon_{13} + \dots$$

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ est appelé **tenseur d'élasticité linéaire**.

Dans le cas de l'élasticité linéaire, on a donc :

$$w_{elas} = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

On retrouve bien : $\underline{\underline{\sigma}} = \dfrac{\partial w_{elas}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$

Analogie avec le ressort : $w_{elas} = \frac{1}{2} k\,\Delta l^2$

$F_{ext\to mass} = \dfrac{\partial w_{elas}}{\partial \Delta l} = k\,\Delta l \;(= -F_{rappel})$

Tenseur d'élasticité linéaire.

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ est un tenseur d'ordre 4 de $(3\times3\times3\times3 =)\,81$ composantes.

Cependant, du fait des symétries de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$, on peut réduire le nombre de composantes indépendantes.

$C_{ijkl} = C_{jikl}$ et $C_{ijkl} = C_{ijlk}$: **les petites symétries de $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$**

de même, $C_{ijkl} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \dfrac{\partial w_{elas}}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij}$: **grande symétrie**

Chacune des petites symétries fait passer le nombre de combinaisons indépendantes de 9 à 6 : le 11, 22, 33 puis 12 13 23. Les petites symétries font toutes les $9 \times 9 = 81$ à $\underbrace{6 \times 6 = 36}$.

↳ en notation de Voigt 6×6 matrice.

La grande symétrie impose cette matrice 6×6 d'être symétrique : 36 cases - 6 sur la diagonale. 30 termes hors diagonaux → 15 termes hors diagonaux indépendants d'où $15 + 6 = 21$ termes indépendants.

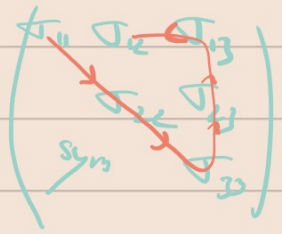
Notation de (Kelvin)-Voigt

Afin de permettre une résolution par algèbre linéaire classique, on "vectorise" le tenseur symétrique d'ordre 2 que sont $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Rq. La forme tensorielle est plus compacte et géométrique (simplicité des prises en compte des rotations et changement de base sans avoir à utiliser d'énormes matrices de rotation pour $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ (Matrice de Bond).
Le piège étant avec Voigt : il faut des matrices différentes pour $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Voigt : $\underline{\underline{\Sigma}}$ $\underline{\underline{E}}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{16} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \text{sym} & C_{56} \\ & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$



pourquoi des 2 ?

Calcul de l'énergie de déformation

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{33}\varepsilon_{33}$$

$$= \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\varepsilon_{13} + 2\sigma_{23}\varepsilon_{23}$$

$$= \underline{\Sigma} \cdot \underline{E}$$

L'énergie qui avec le tenseur se calcule avec un double produit contracté se calcule avec un produit vectoriel en notation de Voigt.

⚠ Le produit scalaire euclidien classique des vecteurs n'est pas égal au produit doublement contracté : $\underline{\underline{\sigma}}^D : \underline{\underline{\varepsilon}}^D + \underline{\underline{\varepsilon}}^D : \underline{\underline{\varepsilon}}^D$

pour cela il faut utiliser la notation de Kelvin-Voigt, plus rigoureuse :

Kelvin-Voigt :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\,\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & \cdots & \tilde{C}_{16} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \text{sym} & \tilde{C}_{56} \\ & & & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Elasticité isotrope.

Nous supposons enfin que la loi de comportement est linéaire et isotrope. C'est à dire qu'elle est invariante par toute rotation $\underline{\underline{R}}$: $w_{elas}(\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{R}}) = w_{elas}(\underline{\underline{\varepsilon}})$

La loi de comportement doit donc uniquement dépendre des trois valeurs propres de $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Il y a une bijection entre ces valeurs propres et les invariants du tenseur de déformation mais ces derniers sont plus commodes à utiliser car ils sont continuement dérivable partout (fonctions polynomiales des composantes) et permettent d'aboutir à des expressions tensorielles simples à la dérivation.

On cherche donc à écrire le potentiel élastique comme fonction des invariants

$$I_1 = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}), \quad I_2 = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) \quad I_3 = \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

La loi étant linéaire on cherche une fonction quadratique.

homogène

Le déf étant un pdt de 3 composantes, il faut d'abord 3, il ne reste que I_1 et I_2.

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

$$\boxed{w_{elas} = \underbrace{\frac{\lambda}{2}\left(\mathrm{trace}(\underline{\underline{\varepsilon}})\right)^2 + \mu\, \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}}_{\text{quadratic}}}$$

où λ et μ sont deux constantes (paramètres matériaux) appelés coefficients de Lamé exprimés en Pa.

Pour trouver la loi de comportement associée à ce potentiel, on la dérive :

$\varepsilon_{kk}\,\varepsilon_{mm}$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w_{elas}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\lambda}{2}\,\underbrace{2\,\frac{\varepsilon_{kk}^2}{\partial \varepsilon_{ij}}}_{f} + \mu\,\underbrace{\frac{\partial\, \varepsilon_{kl}\,\varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}}_{g}$$

$$= \frac{\lambda}{2} \times 2\,\varepsilon_{kk}\frac{\partial \varepsilon_{mm}}{\partial \varepsilon_{ij}} + \mu\left[\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{kl}\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)$$

$$= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu \left(\underbrace{\delta_{ik}\delta_{jl}\varepsilon_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}\varepsilon_{kl}}_{2\varepsilon_{ij}} \right)$$

$$= \boxed{\lambda \, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \, \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

On peut aussi voir que $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{1}}$

$$\frac{\partial (\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})^2}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{\partial (\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{1}})^2}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

$$= 2 \times \underline{\underline{1}} \times (\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{1}})$$

$$= 2 \, \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} \, \underline{\underline{1}}$$

Suivant l'interprétation qu'on veut avoir de cette loi on peut la réécrire en faisant intervenir $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}}$ la déviateur de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ qui caractérise la distortion de forme sans prendre en compte la variation de volume. e est à trace nulle.

On peut alors écrire :

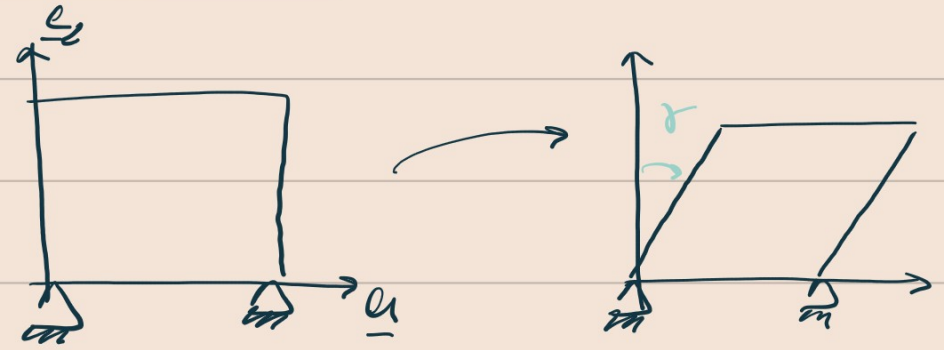
$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \left(\underline{\underline{e}} + \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right)}_{K} \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \, \underline{\underline{e}}$$

K : module de compressibilité.

Exemples a et b ⇒ donner du sens à ν et λ

Cisaillement :



$$\underline{u} = \gamma X_2 \underline{e_1}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

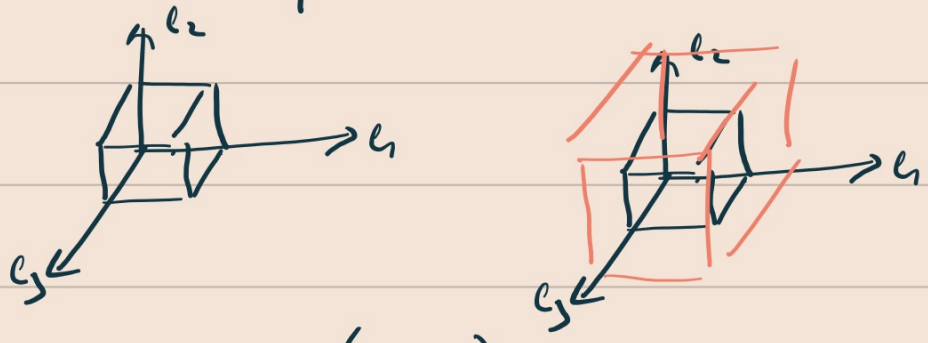
$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\nu\,\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \underbrace{\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})}_{0} \underline{\underline{1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mu\gamma & 0 \\ \mu\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ν peut aussi être noté G : module de cisaillement.

$$\nu = \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_{12}} \left(= \frac{\sigma_{13}}{2\varepsilon_{13}} = \frac{\sigma_{23}}{2\varepsilon_{23}} \right.$$ suivant les directions dans lesquelles on cisaille).

Compression isostatique.



$$\underline{u} = \beta (x_i \underline{e_i}), \quad \beta < 0.$$

$$E = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underbrace{\beta \underline{\underline{1}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \lambda \times \underbrace{3\beta}_{\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}} \underline{\underline{1}}$$

$$= (2\mu + 3\lambda) \beta \underline{\underline{1}}$$

$$= -p \underline{\underline{1}}$$

On a $\dfrac{\Delta V}{V} = \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = 3\beta = \dfrac{3 \times (-p)}{(2\mu + 3\lambda)}$

$$= \frac{-p}{k}$$

d'où $k \, \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = -p$

$$\boxed{k \frac{\Delta V}{V} = -p}$$

Inversion de la loi de comportement :

De manière analogue à $\underline{\underline{C}}$, on peut définir le tenseur de souplesse $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$ tel que

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}$$

- le potentiel élastique peut alors s'écrire

$$w_{el} = \frac{1}{2}\, \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}$$

analogie : $w_{el} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$

Dans le cas isotrope on peut mettre $\underline{\underline{S}}$ en explicitant la loi reliant $\underline{\underline{\sigma}}$ à $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{1}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1)$$

On prend la trace de cette expression :

$$\mathrm{tr}(1) : \quad \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}} = 3\lambda\, \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} + 2\mu\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$
$$= (2\mu + 3\lambda)\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

d'où : $$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\lambda\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{2\mu + 3\lambda}\, \underline{\underline{1}} + 2\mu\, \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \left[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\lambda\, \mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{2\mu + 3\lambda}\, \underline{\underline{1}} \right]}$$

En posant : $\frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2\mu}$ et $\frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}$

la relation devient :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

d'où $$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

Soit $\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} = \frac{1}{2\mu}$

$$\Rightarrow \frac{1}{E} = \frac{1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}$$

$$= \frac{3\lambda+2\mu-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}$$

$$= \frac{(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}$$

$$1+\nu = \frac{E}{2\mu} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)}\right)$$

$$= \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}$$

d'où $\nu = \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)} - 1$

$$= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Exemple c. → donner du sens à E et ν

Cas de la traction pure

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On utilise la loi de comportement permettant de remonter à $\underline{\underline{\varepsilon}}$ depuis $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/E \times \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu/E\,\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu/E\,\sigma_{11} \end{pmatrix}$$

d'où $\quad \varepsilon_{11} \times E = \sigma_{11} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}}$

$$\boxed{\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}}$$

$$-\nu/E\,\sigma_{11} \times \frac{E}{\sigma_{11}}$$

Exercice : compression oedométrique.

1. $$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{u}\right) \end{cases}$$

CL : $\underline{u}(r, \theta, 0) = \underline{0}$ sur $\partial\Omega_{inf}$

$\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, h) = -p\, \underline{e_z}$ sur $\partial\Omega_{sup}$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{u}(R, \theta, z) \cdot \underline{e_r} = 0 \text{ sur} \\ \underline{\underline{\sigma}}(R, \theta, z) \cdot \underline{e_\theta} = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}}(R, \theta, z) \cdot \underline{e_z} = 0 \end{array}\right| \partial\Omega_{lat}.$$

2. $\underline{u} = u(z)\, \underline{e_z}$

3. $$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}} \underline{u}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{z,z} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = u_{z,z} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \Rightarrow u_{z,zz} = 0$$

$$u_z = az + b \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

$$u(z=0) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ d'où } u_z = az$$

$$\text{d'où } \underline{\underline{\Sigma}} = a \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

$$\text{sur } \partial\Omega_{sup}, \ \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{e_z} = -P\underline{e_z}$$

$$\Rightarrow a(\lambda + 2\mu) = -P$$

$$\Rightarrow a = -\frac{P}{\lambda + 2\mu}$$

$$\text{Soit } \underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda P}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda P}{\lambda+2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} = -\frac{P}{\lambda + 2\mu}\underline{z}$$

5. $\underline{\underline{\Sigma}}(R,\theta,z) \cdot \underline{e_r} = -\frac{\lambda P}{\lambda+2\mu}\underline{e_r} = -q\underline{e_r}$ (def de $\underline{\underline{\Sigma}}$)

$$\text{d'où } q = \frac{\lambda P}{\lambda + 2\mu}$$

6. $K = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2}{3}\frac{E}{2(1+\nu)}$

$$= \frac{3E\nu + E(1-2\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$= \frac{E(1+\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E}{3}\frac{1}{(1-2\nu)}$$

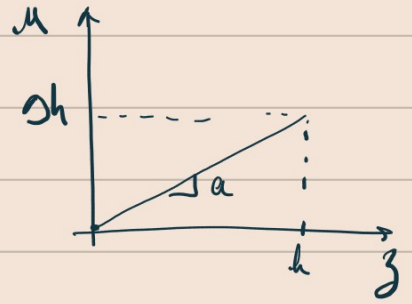
Donc $K \to \infty \Rightarrow \nu \to 1/2$

Dans ce cas, $\lambda \sim K \gg \mu$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P}{\lambda+2\mu} \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P}{\lambda} \end{pmatrix} \sim -\frac{P}{K} \quad \text{car } K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

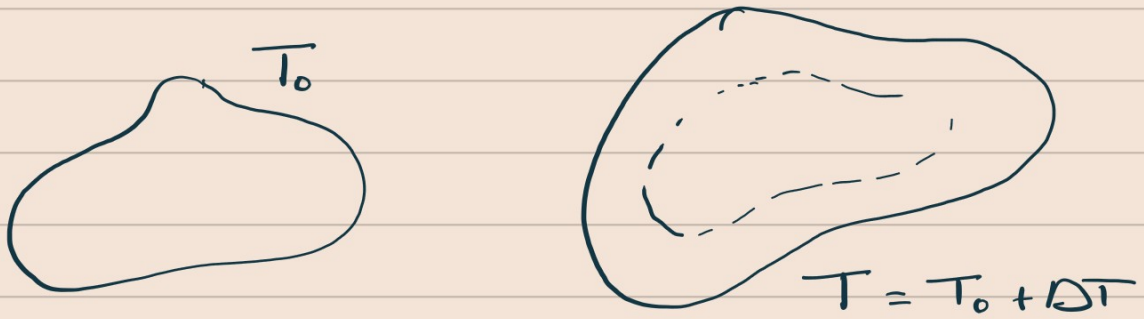
d'où $K \simeq \frac{-P}{\varepsilon_{zz}}$ avec $P = \frac{F}{S}$



$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta h}{h}$$

Soit $K = \frac{F}{S}\frac{h}{|\Delta h|}$

Thermoélasticité



$\begin{cases} \Delta T > 0 : \text{dilatation thermique} \\ \Delta T < 0 : \text{contraction thermique.} \end{cases}$

Quand un solide est soumis à une variation de température ΔT, il se dilate ou se contracte suivant le signe de ΔT.

Les déformations thermiques sont directement proportionnelles à ΔT avec un coefficient de proportionnalité α, ici supposé isotrope.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}(\underline{r}) = \alpha \, \Delta T(\underline{r}) \, \underline{\underline{1}}.$$

Si rien n'empêche cette dilatation, la variation de température n'entraîne aucune contrainte. Les déformations thermiques s'ajoutent aux déformations élastiques :

- $\underline{\underline{\varepsilon}}^{total}(\underline{r}) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{ela}(\underline{r}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}(\underline{r})$

$$= \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{r}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}(\underline{r})$$

$$= \underbrace{\frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^{ela}} + \underbrace{\alpha \, \Delta T \, \underline{\underline{1}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}}$$

- $\underline{\underline{\varepsilon}}^{e} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{total} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$ $\quad \left(\text{si } \underline{\underline{\varepsilon}}^{tot} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}, \ \underline{\underline{\varepsilon}}^{e} = 0 \right)$.

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^e + \lambda\,\mathrm{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^e)\,\underline{\underline{1}}$$

$$= 2\mu\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{total} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}\right) + \lambda\,\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{total} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}\right)\underline{\underline{1}}$$

$$= 2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{tot} + \lambda\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{tot} - \underbrace{\left(2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{th} + \lambda\,\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}\right)\underline{\underline{1}}\right)}$$

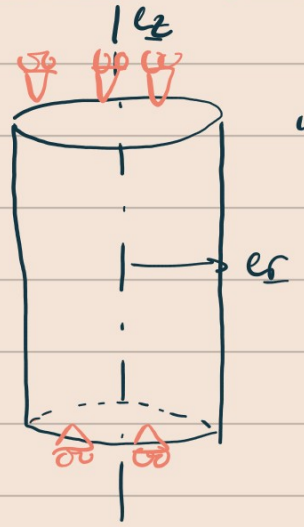
$$2\mu\,\alpha\,\Delta T\,\underline{\underline{1}} + \lambda \times 3\,\alpha\,\Delta T\,\underline{\underline{1}}$$

$$= \alpha\,\Delta T\,(2\mu + 3\lambda)$$

$\swarrow\ K = \frac{2}{3}\mu + \lambda$

$$= 3\,\alpha\,\Delta T\,K$$

Exercice - thermoélasticité



sur $\partial\Omega_{z=0}$: $\begin{cases} \underline{u}(r,\theta,0)\cdot\underline{e}_z = 0 \\ \underline{T}\cdot\underline{e}_\theta = 0 \quad \underline{T}\cdot\underline{e}_r = 0 \end{cases}$

$(\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,0)\cdot\underline{e}_z$

sur $\partial\Omega_{z=L}$: $\underline{u}(r,\theta,L)\cdot\underline{e}_z = 0$

$\underline{T}\cdot\underline{e}_\theta = 0 \quad \underline{T}\cdot\underline{e}_r = 0$

$(\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,L)\cdot\underline{e}_z)$

sur $\partial\Omega_{lat}$: $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(R,\theta,z)\cdot\underline{e}_r = \underline{0}$

2/ $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz}\,\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$

On a bien $\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ donc cette forme

le champ de contrainte est admissible car elle permet également de vérifier les CLs.

3) $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$

$$= \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} + \alpha\Delta T\,\underline{\underline{1}}$$

d'où $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -\nu/E\,\sigma_{zz} + \alpha\Delta T & 0 & 0 \\ 0 & -\nu/E\,\sigma_{zz} + \alpha\Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha\Delta T \end{pmatrix}$